

OBRAS DE BERTRAND RUSSELL

Bertrand Russell

Introdução à Filosofia Matemática

Quarta edição

Tradução de
Giasone Rebuá

Revisão técnica do
Prof. Paulo Alcoforado
da Universidade Federal do Rio de Janeiro

ABC da Relatividade
Análise da Matéria
A Análise da Mente
A Autoridade e o Indivíduo
Caminhos para a Liberdade
Educação e Ordem Social
Elogio do Lazer
Ética e Política na Sociedade Humana
Fundamentos de Filosofia
O Impacto da Ciência na Sociedade
Introdução à Filosofia Matemática
Meu Desenvolvimento Filosófico
Misticismo e Lógica
Perspectivas da Civilização Industrial
O Poder — Uma nova análise social
Significado e Verdade

ZAHAR EDITORES
RIO DE JANEIRO

Título original:
Introduction to Mathematical Philosophy
 Traduzido da 10ª impressão (1960)
 publicada por
 George Allen & Unwin Ltd., Londres, Inglaterra

Copyright © by George Allen & Unwin Ltd.
 Direitos reservados.

A reprodução não autorizada
 desta publicação, no todo ou em parte,
 constitui violação do copyright. (Lei nº 5.988)

Edições brasileiras: 1963, 1966, 1974

1981

Direitos para a língua portuguesa adquiridos por
 ZAHAR EDITORES
 Caixa Postal 207 ZC-00 Rio
 que se reservam a propriedade desta versão

Impresso no Brasil

ÍNDICE

PREFÁCIO	7
CAPÍTULO I — A SÉRIE DOS NÚMEROS NATURAIS ...	9
CAPÍTULO II — DEFINIÇÃO DE NÚMERO	18
CAPÍTULO III — FINITUDE E INDUÇÃO MATEMÁTICA .	26
CAPÍTULO IV — DEFINIÇÃO DE ORDEM	35
CAPÍTULO V — ESPÉCIES DE RELAÇÕES	47
CAPÍTULO VI — SIMILARIDADE DE RELAÇÕES	56
CAPÍTULO VII — NÚMEROS RACIONAIS, REAIS E COM- PLEXOS	66
CAPÍTULO VIII — NÚMEROS CARDINAIS INFINITOS	79
CAPÍTULO IX — SÉRIES INFINITAS E ORDINAIS	90
CAPÍTULO X — LIMITES E CONTINUIDADE	97
CAPÍTULO XI — LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES	106
CAPÍTULO XII — SELEÇÕES E O AXIOMA MULTIPLICA- TIVO	115
CAPÍTULO XIII — O AXIOMA DA INFINIDADE E OS TIPOS LÓGICOS	128
CAPÍTULO XIV — INCOMPATIBILIDADE E TEORIA DA DEDUÇÃO	139
CAPÍTULO XV — FUNÇÕES PROPOSICIONAIS	149
CAPÍTULO XVI — DESCRIÇÕES	160
CAPÍTULO XVII — CLASSES	173
CAPÍTULO XVIII — MATEMÁTICA E LÓGICA	185

Prefácio

ESTE LIVRO se destina essencialmente a ser uma "Introdução" e não visa a apresentar uma discussão dos problemas que aborda. Pareceu apropriado apresentar certos resultados, até então somente alcançáveis pelos que já dominavam o simbolismo lógico, em uma forma que ofereça o mínimo de dificuldade ao principiante. Foi despendido o maior esforço para evitar o dogmatismo no tocante às questões ainda sujeitas a sérias dúvidas e tal disposição dominou, até certo ponto, a escolha dos tópicos considerados. As partes iniciais da Lógica Matemática são menos definidamente conhecidas do que suas partes ulteriores, mas são pelo menos de igual interesse filosófico. Muito do que é apresentado nos capítulos que se seguem não pode ser apropriadamente chamado "filosofia", embora as questões consideradas tenham sido incluídas na Filosofia enquanto não existia uma ciência satisfatória das mesmas. A natureza do infinito e da continuidade, por exemplo, pertenceu, em tempos idos, à Filosofia, mas pertence hoje à Matemática. Talvez não se possa considerar que a *Filosofia Matemática*, no sentido estrito, inclua resultados científicos definidos como os que foram obtidos nessa região; da Filosofia Matemática esperar-se-á, naturalmente, que trate de questões que se situam na fronteira do conhecimento humano e sobre as quais ainda não se tem relativa certeza. Mas a especulação em torno dessas questões dificilmente será frutífera, a menos que sejam conhecidas as partes mais científicas dos princípios da Matemática. Um livro que trate dessas partes pode, portanto, ser considerado uma *introdução* à Filosofia Matemática, embora dificilmente se possa afirmar que trate de uma parte da Filosofia, exceto onde ultrapassa o seu próprio âmbito. Contudo, aborda de fato um conjunto de conhecimentos que, para os que o aceitam, parece invalidar muito da Filosofia tradicional e até boa parte do que é comum na atualidade. Desse modo, bem como em razão de sua repercussão em problemas ainda não resolvidos, a Lógica Matemática é rele-

vante para a Filosofia. Por esse motivo e também por causa da importância intrínseca do assunto, poderá haver algum propósito em uma apreciação sucinta dos principais resultados da Lógica Matemática, em uma forma que não exija nem conhecimentos de Matemática nem aptidão para o simbolismo matemático. Contudo, aqui, como em qualquer outro campo, o método é mais importante do que os resultados, do ponto de vista das pesquisas posteriores; e o método não pode ser bem explicado dentro da estrutura de um livro como este. É de esperar que alguns leitores se mostrem suficientemente interessados para prosseguir no estudo do método pelo qual a Lógica Matemática pode ser tornada útil à investigação dos problemas tradicionais da Filosofia. Esse é, porém, um tópico que não se tentou abordar nas páginas que se seguem.

BERTRAND RUSSELL

CAPÍTULO I

A série dos números naturais

A MATEMÁTICA É UM ESTUDO que, quando iniciado de suas partes mais familiares, pode ser levado a efeito em duas direções opostas. A mais comum é construtiva, no sentido da complexidade gradativamente crescente: dos inteiros para as frações, os números reais, os números complexos; da adição e multiplicação para a diferenciação e integração e daí para a Matemática superior. A outra direção, que é menos familiar, avança, pela análise, para a abstração e a simplicidade lógica sempre maiores; em vez de indagar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admita para começar, indaga-se que mais idéias e princípios gerais podem ser encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido. É o fato de seguir essa direção oposta o que caracteriza a Filosofia Matemática, em contraste com a Matemática comum. Mas deve-se entender que a distinção não é imprimeada ao assunto e sim à disposição de ânimo do investigador. Os antigos geometras gregos ao passarem das regras de agrimensura empíricas egípcias para as proposições gerais pelas quais se constatou estarem aquelas regras justificadas, e daí para os axiomas e postulados de Euclides, estavam praticando a Filosofia Matemática, segundo a definição acima; porém, uma vez atingidos os axiomas e postulados, o seu emprego dedutivo, como testemunhamos em Euclides, pertencia à Matemática no sentido comum. A distinção entre Matemática e Filosofia Matemática depende do interesse que inspire a pesquisa e da etapa por esta atingida e não das proposições às quais a investigação esteja afeta.

Podemos enunciar a mesma distinção de outra maneira. As coisas mais óbvias e fáceis da Matemática não são as que aparecem logicamente no início; são as que, do ponto de vista da dedução lógica, surgem em algum ponto no meio. Assim

como os corpos mais fáceis de se ver não são os que se encontram muito perto ou muito longe, nem os muito grandes ou muito pequenos, assim também as concepções de mais fácil percepção não são as muito complexas ou as muito simples (usando-se o termo "simples" em sentido lógico). E, da mesma forma como necessitamos de dois tipos de instrumento, o telescópio e o microscópio, para ampliarmos o nosso poder visual, necessitamos de dois tipos de instrumento para a ampliação de nossa capacidade lógica: um para nos fazer avançar até à Matemática superior, outro para nos levar de volta aos fundamentos lógicos das coisas que somos propensos a aceitar como fatos consumados em Matemática. Constataremos que, analisando nossas noções matemáticas ordinárias, adquirimos visão renovada, poderes novos e os meios de chegar a assuntos matemáticos inteiramente novos pela adoção de novas linhas de avanço após a nossa viagem para trás. O propósito deste livro é explicar a Filosofia Matemática simplesmente e de maneira não-técnica, sem demorar nas partes que sejam por tal forma duvidosas ou difíceis que tornem escassamente possível um tratamento elementar. Um tratamento completo das mesmas será encontrado em *Principia Mathematica*;^{*} o tratamento neste volume tem mero caráter de introdução.

Para uma pessoa medianamente educada de hoje, o ponto de partida óbvio da Matemática seria a série de números inteiros:

1, 2, 3, 4, ... etc.

Provavelmente apenas a pessoa dotada de algum conhecimento de Matemática pensaria em começar com 0 e não com 1, mas admitiremos a existência desse grau de conhecimento; adotaremos para nosso ponto de vista a série:

0, 1, 2, 3, ... n , $n+1$, ...

e é a essa série que nos estaremos referindo quando falarmos em "série dos números naturais".

Somente em um estágio muito avançado da civilização é que podemos adotar essa série para nosso ponto de partida. Devem ter sido necessárias muitas eras para a descoberta de

que um casal de faisões e um par de dias constituíam, ambos, instâncias do número 2: o grau de abstração envolvido está longe de ser imediato. E a descoberta de que 1 é um número deve ter sido difícil. Quanto ao 0, ele constitui acréscimo assaz recente; os gregos e os romanos não dispunham de tal algarismo. Se nos tivéssemos dedicado à Filosofia Matemática em dias mais afastados, teríamos sido obrigados a começar com algo menos abstrato do que a série dos números naturais, a qual atingiríamos como uma etapa de nossa viagem para trás. Quando os fundamentos lógicos da Matemática se tiverem tornado mais familiares, estaremos habilitados a começar ainda mais recuados, em um ponto que constitui hoje um estágio posterior de nossa análise. Mas, no momento, os números naturais parecem representar o que é mais fácil e familiar em Matemática.

Mas, conquanto familiares, não são compreendidos. Pouquíssimas pessoas têm uma definição para o significado de "número" ou "0" ou "1". Não é difícil ver-se que, partindo-se de 0, pode-se atingir qualquer outro número natural por adições repetidas de 1, mas teremos de definir o que queremos dizer com as expressões "adicionar 1" e "repetir". Essas questões não são de modo algum fáceis. Acreditou-se até recentemente que pelo menos algumas dessas primeiras noções de Aritmética deviam ser aceitas como por demais simples e primitivas para que fossem definidas. Como todos os termos definidos o são por meio de outros termos, está claro que o conhecimento humano terá sempre de se contentar em aceitar alguns termos como inteligíveis sem definição, a fim de ter um ponto de partida para suas definições. Não é claro que tenham de existir termos que sejam *incapazes* de ser definidos: é possível que, por mais que avancemos nas definições, *possamos* ir ainda mais além. Por outro lado, também é possível que, quando a análise tenha sido levada suficientemente avante, alcancemos termos realmente simples, e, portanto, logicamente incapazes da espécie de definição que consiste em analisar. Esta é uma questão que não nos é necessário decidir; para os propósitos que temos em mira basta observar que, como os poderes humanos são finitos, as definições que nos são conhecidas terão sempre de começar em algum ponto, com termos indefinidos para o momento, embora talvez não permanentemente.

Toda a Matemática pura tradicional, incluindo a Geometria Analítica, pode ser considerada como consistindo totalmente em proposições sobre os números naturais. Equivale a dizer, os

* Cambridge University Press, vol. I, 1910; vol. II, 1911; vol. III, 1913. Por WHITEHEAD e RUSSELL.

termos que ocorrem podem ser definidos por meio dos números naturais e as proposições podem ser deduzidas das propriedades dos números naturais — com o acréscimo, em cada caso, das idéias e proposições da Lógica pura.

O fato de toda a Matemática pura tradicional poder ser derivada dos números naturais é descoberta razoavelmente recente, embora disso de há muito se suspeitasse. Pitágoras que acreditava que não apenas a Matemática, mas tudo o mais podia ser deduzido dos números, foi o descobridor do mais sério obstáculo no caminho do que é chamado “aritimetização” da Matemática. Foi Pitágoras quem descobriu a existência dos incomensuráveis, e, em particular, da incomensurabilidade entre o lado de um quadrado e sua diagonal. Se o comprimento do lado de um quadrado é de 1 centímetro, o número de centímetros do comprimento da diagonal é igual à raiz quadrada de 2, que pareceu não ser número algum. O problema assim levantado só foi resolvido em nossos próprios dias e só foi *completamente* resolvido com a ajuda da redução da Aritmética à Lógica, que será explicada nos capítulos seguintes. No momento, simplesmente, consideraremos fato consumado a aritimetização da Matemática, embora isso tenha constituído feito da mais alta importância.

Uma vez toda a Matemática pura tradicional reduzida à teoria dos números naturais, o passo seguinte na análise lógica foi reduzir essa própria teoria ao menor conjunto de premissas e termos não definidos dos quais pudesse ser derivada. Esse trabalho foi realizado por Peano. Ele mostrou que toda a teoria dos números naturais podia ser derivada de três idéias primitivas e cinco proposições primitivas, além daquelas da Lógica pura. Essas três idéias e cinco proposições tornaram-se, desse modo, por assim dizer, as garantias de toda a Matemática pura tradicional. Se elas pudessem ser definidas e provadas em termos de outras, também o poderia toda a Matemática pura. Seu “peso” lógico, caso se possa usar tal expressão, é igual ao de toda a série de ciências deduzidas da teoria dos números naturais; a verdade dessa série inteira estará garantida caso esteja garantida a verdade das cinco proposições primitivas, desde que, naturalmente, nada haja de errôneo no aparato lógico também envolvido. O trabalho de analisar a Matemática é extraordinariamente facilitado por esse trabalho de Peano.

As três idéias primitivas da Aritmética de Peano são:

0, número, sucessor.

Por “sucessor” ele quer dizer o número seguinte na ordem natural. Equivale a dizer, o sucessor de 0 é 1, o sucessor de 1 é 2, e assim por diante. Por “número”, ele quer dizer, no caso, a classe dos números naturais.* Ele não pressupõe conheçamos todos os números dessa classe, mas apenas saibamos o que queremos dizer quando dizemos que isto ou aquilo é um número, assim como sabemos o que queremos dizer quando dizemos “Jones é um homem”, embora não conheçamos todos os homens individualmente.

As cinco proposições primitivas admitidas por Peano são:

- 1) 0 é um número.
- 2) O sucessor de qualquer número é um número.
- 3) Não há dois números com um mesmo sucessor.
- 4) 0 não é o sucessor de número algum.
- 5) Qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números.

Essa última proposição é o princípio da indução matemática. Teremos muito a dizer relativamente à indução matemática no que se segue; no momento, estamos interessados nela somente quanto à sua ocorrência na análise da Aritmética de Peano.

Consideremos brevemente de que maneira a teoria dos números naturais resulta dessas três idéias e cinco proposições. Para começar, definimos 1 como “sucessor de 0”, 2 como “sucessor de 1”, e assim por diante. Podemos, obviamente, prosseguir com essas definições enquanto nos aprouver, porquanto, em virtude de 2), todo número que atingirmos terá um sucessor, e, em virtude de 3), esse número não poderá ser qualquer dos já definidos, porque, se assim fosse, dois números diferentes teriam o mesmo sucessor; e, em virtude de 4), nenhum dos números que alcançamos na série de sucessores poderá ser 0. Assim, a série de sucessores nos dá uma série infinita de números continuamente novos. Em virtude de 5), todos os números estão nessa série, a qual começa com 0 e prossegue através de sucessores sucessivos; porque: a) 0 pertence a essa série, e b) se um número n a ela pertence, também a ela pertencerá o seu

* Usaremos “número” nesse sentido no presente capítulo. Mais adiante, a palavra será usada em sentido mais geral.

sucessor, porquanto, de acordo com a indução matemática, todos os números pertencem à série.

Suponhamos que nos propomos a definir a soma de dois números. Tomando qualquer número m , definimos $m+0$ como m e $m+(n+1)$ como o sucessor de $m+n$. Em virtude de 5), isso dá uma definição da soma de m e n , seja qual for o número n . Podemos definir de forma semelhante o produto de dois números quaisquer. O leitor poderá facilmente convencer-se de que qualquer proposição elementar comum da Aritmética pode ser provada por meio de nossas cinco premissas, e, caso sinta dificuldade, poderá encontrar a prova em Peano.

É tempo de abordarmos as considerações que tornam necessário avançar mais além do ponto a que chegou Peano, que representa o último aperfeiçoamento da "arimetização" da Matemática, até Frege, que primeiro conseguiu "logificar" a Matemática, isto é, reduzir à Lógica as noções aritméticas que os seus predecessores mostraram ser suficientes para a Matemática. Não apresentaremos de fato neste capítulo as definições de número e de determinados números, de Frege, mas daremos algumas das razões pelas quais o tratamento dado por Peano é menos final do que parece.

Em primeiro lugar, as três idéias primitivas de Peano — isto é, "0", "número" e "sucessor" — são passíveis de um número indefinido de interpretações diferentes, satisfazendo, todas, as cinco proposições primitivas. Daremos alguns exemplos.

1) Admitamos que "0" signifique 100 e que "número" signifique os números de 100 em diante na série dos números naturais. Então, todas as nossas proposições primitivas são satisfeitas, até mesmo a quarta, porquanto, embora 100 seja o sucessor de 99, este não é um "número" no sentido ora por nós emprestado a esta palavra. É óbvio que qualquer número poderá substituir 100 neste exemplo.

2) Deixemos que "0" tenha o seu significado usual, mas façamos que "número" signifique o que geralmente chamamos "número par" e que o sucessor de um número seja o resultado da adição de dois a ele. Então "1" ficará no lugar do número dois, "2" no do número quatro, e assim por diante; a série dos "números" será agora:

0, dois, quatro, seis, oito ...

Todas as cinco premissas de Peano ainda são satisfeitas.

3) Admitamos que "0" signifique o número um e que "número" signifique o conjunto:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots$$

e que "sucessor" signifique a "metade". Todos os cinco axiomas de Peano serão verdadeiros para esse conjunto.

Está claro que tais exemplos poderiam ser multiplicados indefinidamente.

Na verdade, dada qualquer série:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

que é infinita, não contém repetições, tem um começo e não tem termo algum que não possa ser atingido por um número finito de passos, temos um conjunto de termos que verifica os axiomas de Peano. Isso pode ser visto facilmente, embora a prova formal seja algo longa. Seja "0" entendido como x_0 , seja "número" entendido como todo o conjunto de termos, e seja "sucessor" de x_n entendido como x_{n+1} . Então,

- 1) "0 é um número", isto é, x_0 é um membro do conjunto.
- 2) "O sucessor de qualquer número é um número", isto é, tomando-se qualquer termo x_n do conjunto, x_{n+1} é também do conjunto.
- 3) "não há dois números com um mesmo sucessor", isto é, se x_m e x_n são dois números diferentes do conjunto, x_{m+1} e x_{n+1} são diferentes; isto resulta do fato de (por hipótese) não haver repetições no conjunto.
- 4) "0 não é o sucessor de número algum", isto é, nenhum termo do conjunto vem antes de x_0 .
- 5) Isto se torna: Qualquer propriedade que pertença a x_0 e que pertença a x_{n+1} desde que pertença a x_n , pertence a todos os xx .

Isso se segue da propriedade correspondente dos números.

Uma série da forma:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

na qual há um primeiro termo, um sucessor para cada termo (de modo a não haver um último termo), sem repetições e na qual qualquer termo pode ser atingido, partindo do início, por um número finito de passos, é chamada *progressão*. As progressões são de grande importância para os princípios da Matemática. Como acabamos de ver, toda progressão verifica os cinco axiomas de Peano. Pode ser provado, inversamente, que toda série que verifique os cinco axiomas de Peano é uma progressão. Portanto, esses cinco axiomas podem ser usados para definir a classe das progressões: "progressões" são "aquelas séries que verificam esses cinco axiomas". Qualquer progressão pode ser tomada como base da Matemática pura: podemos dar o nome "0" ao seu primeiro termo, o nome "número" a todo o conjunto de seus termos e o nome "sucessor" ao termo seguinte na progressão. A progressão não precisa ser composta de números: pode ser composta de pontos no espaço, ou momentos de tempo ou quaisquer outros termos dos quais haja um suprimento infinito. Cada progressão diferente dará surgimento a uma interpretação diferente de todas as proposições da Matemática pura tradicional; todas essas possíveis interpretações serão igualmente verdadeiras.

Nada há no sistema de Peano que nos permita distinguir entre essas diferentes interpretações de suas idéias primitivas. Admite-se que sabemos o que queremos dizer por "0" e que não devemos supor que esse símbolo signifique 100 ou a agulha de Cleópatra ou qualquer das outras coisas que possa significar.

O fato de "0" e "número" e "sucessor" não poderem ser definidos por meio dos cinco axiomas de Peano, devendo ser independentemente entendidos, é ponto importante. Não devemos querer que os nossos números meramente verifiquem fórmulas matemáticas, mas também que se apliquem de modo certo a objetos comuns. Queremos ter dez dedos, dois olhos e um nariz. Um sistema no qual "1" significasse 100 e "2" significasse 101, e assim por diante, poderia ser muito bom, para a Matemática pura, mas não se prestaria à vida cotidiana. Queremos que "0" e "número" e "sucessor" tenham significados que nos dêem as devidas porções de dedos, olhos e nariz. Já temos alguma noção (embora não suficientemente articulada ou analítica) do que queremos dizer por "1" e "2" e assim por diante e o uso que fazemos dos números em Aritmética deverá conformar-se a essa noção. Não podemos garantir que o mesmo se verifique por meio do método de Peano; o máximo

que podemos fazer, caso adotemos esse método, é declarar "sabemos o que queremos dizer por '0' e 'número' e 'sucessor', embora não possamos explicar o que queremos dizer em termos de outros conceitos mais simples". É bem legítimo fazer tal declaração quando necessário e a *certa* altura todos temos de fazê-lo; mas constitui o objetivo da Filosofia Matemática evitá-lo por mais tempo possível. Graças à teoria lógica da Aritmética podemos evitá-lo por muito tempo.

Poder-se-á sugerir que, em vez de estabelecer "0" e "número" e "sucessor" como termos cujos significados conhecemos embora não os possamos definir, podemos deixar que representem três termos *quaisquer* que verifiquem os cinco axiomas de Peano. Não mais serão termos que têm um significado que é determinado embora não definido: serão "variáveis", termos a respeito dos quais fazemos certas hipóteses, isto é, aquelas enunciadas nos cinco axiomas, mas que são, de outro modo, indeterminados. Se adotarmos esse plano, os nossos teoremas não serão provados no tocante a um determinado conjunto de termos chamados "os números naturais", mas relativamente a todos os conjuntos de termos que tenham certas propriedades. Tal procedimento não é falacioso; na verdade representa, para certos propósitos, valiosa generalização. Mas, sob dois pontos de vista, malogra em fornecer uma base adequada para a Aritmética. Em primeiro lugar, não nos possibilita saber se existem quaisquer conjuntos de termos que verifiquem os axiomas de Peano; nem sequer dá a mais tênue sugestão sobre qualquer meio de descobrir se existem tais conjuntos. Em segundo lugar, queremos, como já observamos, que os nossos números sejam tais que possam ser usados para contar os objetos comuns, e isso exige que os nossos números tenham significado *definido*, não apenas que tenham certas propriedades formais. Esse significado exato é definido pela teoria lógica da Aritmética.

CAPÍTULO II

Definição de número

A PERGUNTA “QUE É NÚMERO?” tem sido com freqüência feita, mas só foi corretamente respondida em nossa própria época. A resposta foi dada por Frege em 1884, em seus *Grundgesetze der Arithmetik*.^{*} Conquanto esse livro seja bem pequeno, não seja difícil, e seja da mais alta importância, quase não atraiu atenção alguma e a definição de número que contém permaneceu praticamente desconhecida até que foi redescoberta por este autor em 1901.

Ao buscarmos uma definição de número, a primeira coisa a esclarecer é aquilo que podemos chamar a gramática de nossa indagação. Muitos filósofos, ao tentarem definir número, dedicam-se, na realidade, ao trabalho de definir pluralidade, que é coisa muito diferente. *Número* é o que é característico de números, como *homem* é o que é característico de homens. Uma pluralidade não é uma instância de número, mas de algum número determinado. Um trio de homens, por exemplo, é uma instância do número 3, e o número 3 é uma instância de número; mas o trio não é uma instância de número. Esse ponto poderá parecer elementar e dificilmente digno de ser mencionado; no entanto, provou ser por demais sutil para os filósofos, com poucas exceções.

Um determinado número não é idêntico a qualquer coleção de termos que o contenha: o número 3 não é idêntico ao trio consistindo de Brown, Jones e Robinson. O número 3 é algo que todos os trios têm em comum e que os distingue de outras coleções. Um número é algo que caracteriza certas coleções, isto é, aquelas que têm aquele número.

^{*} A mesma resposta é dada de maneira mais plena e desenvolvida em seus *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1, 1893.

Em vez de falarmos de uma “coleção”, falaremos, via de regra, de uma “classe” ou, por vezes, de um “conjunto”. As outras palavras usadas em Matemática para designar essa mesma coisa são “agregado” e “multiplicidade”. Teremos muito a dizer depois sobre as classes. No momento, diremos o mínimo possível. Mas há algumas observações que têm de ser feitas imediatamente.

Uma classe ou coleção pode ser definida de duas maneiras que à primeira vista parecem assaz distintas. Podemos enumerar seus termos, como quando dizemos “A coleção a que me refiro é a de Brown e Robinson”. Ou podemos mencionar uma propriedade que a defina, como quando falamos de “humanidade” ou de “habitantes de Londres”. A definição que enumera é chamada definição por “extensão” e a que menciona uma propriedade definidora é chamada definição por “intensão”. Desses dois tipos de definição, aquele por intensão é logicamente mais fundamental. Isso é mostrado por duas considerações: 1) a de que a definição extensional pode ser sempre reduzida a uma definição intensional; 2) a de que a definição intensional com freqüência não pode ser, sequer teoricamente, reduzida à definição extensional. Cada um desses pontos exige uma palavra de explanação.

1) Brown, Jones e Robinson possuem, todos, uma certa propriedade que não é possuída por nada mais em todo o universo, a saber, a propriedade de ser ou Brown ou Jones ou Robinson. Essa propriedade pode ser usada para dar uma definição por intensão da classe consistindo de Brown e Jones e Robinson. Considere-se a fórmula “ x é Brown ou x é Jones ou x é Robinson”. Essa fórmula só será verdadeira apenas para os três x , isto é, Brown e Jones e Robinson. À esse respeito, assemelha-se a uma equação cúbica com suas três raízes. Pode ser tomada como assinalando uma propriedade comum aos membros da classe que consiste desses três homens e peculiar a eles. Tratamento semelhante pode, obviamente, ser aplicado a qualquer outra classe dada por extensão.

2) É óbvio que, na prática, podemos com freqüência saber muito sobre uma classe sem estarmos capacitados para enumerar seus membros. Nenhum homem poderia, de fato, enumerar todos os homens, ou mesmo todos os habitantes de Londres, no entanto sabe-se muito sobre cada uma dessas classes. Isso é suficiente para mostrar que a definição por extensão não é necessária ao conhecimento sobre uma classe. Mas, quando consi-

deramos as classes infinitas, constatamos que a enumeração não é sequer teoricamente possível para os seres que vivem apenas durante um tempo finito. Não podemos enumerar todos os números naturais: são eles 0, 1, 2, 3, e assim por diante. Em algum ponto teremos de contentar-nos com esse "e assim por diante". Não podemos enumerar todas as frações ou todos os números irracionais, ou, inteiramente, qualquer outra coleção infinita. Assim, o nosso conhecimento relativamente a todas essas coleções só pode ser obtido de uma definição por intensão.

Essas observações são relevantes de três maneiras diferentes quando buscamos a definição de número. Em primeiro lugar, os números formam, eles próprios, uma coleção infinita, não podendo, portanto, ser definidos por enumeração. Em segundo lugar, as coleções que tenham um determinado número de termos formam, elas próprias, presumivelmente, uma coleção infinita: é de se presumir, por exemplo, que exista uma coleção infinita de trios no mundo, pois, se assim não fosse, o número total de coisas no mundo seria finito, o que, conquanto possível, parece improvável. Em terceiro lugar, desejamos definir "número" de tal maneira que possibilite os números infinitos; assim, devemos poder falar do número de termos de uma coleção infinita, e tal coleção deverá ser definida por intensão, isto é, por uma propriedade comum a todos os seus membros e a eles peculiar.

Para muitos propósitos, uma classe e uma característica que a define são praticamente intercambiáveis. A diferença vital entre as duas consiste no fato de haver apenas uma classe com um dado conjunto de membros, enquanto sempre há muitas características diferentes pelas quais uma determinada classe pode ser definida. Os homens podem ser definidos como bípedes implumes ou como animais racionais ou (mais corretamente) pelos traços pelos quais Swift delinea os *Yahoos*.^{*} É esse fato, de uma característica definidora jamais ser única, o que torna as classes úteis; de outro modo, poderíamos contentar-nos com as propriedades comuns e peculiares aos seus membros.^{**} Qualquer dessas propriedades pode ser usada em lugar da classe sempre que a unicidade não seja importante.

^{*} Uma raça suja de brutos, com a forma e todos os vícios do homem, descrita por SWIFT em *As Viagens de Gulliver*. (N. do T.)

^{**} Conforme será explicado mais adiante, as classes podem ser consideradas ficções lógicas, elaboradas de características definidoras. No momento, simplificará a nossa exposição o seu tratamento como se fossem reais.

Voltando agora a definição de número, está claro que número é um modo de reunir certas coleções, isto é, as que têm um dado número de termos. Podemos imaginar todas as duplas em uma coleção, todos os trios em outra, e assim por diante. Dessa maneira obtemos várias coleções de coleções, consistindo cada coleção de todas as coleções que têm um certo número de termos. Cada coleção é uma classe cujos membros são coleções, isto é, classes; assim, cada uma é uma classe de classes. A coleção que consiste de todas as duplas, por exemplo, é uma classe de classes: cada dupla é uma classe com dois membros, e a coleção inteira de duplas é uma classe com número infinito de membros, cada um dos quais é uma classe de dois membros.

Como decidiremos sobre se duas coleções deverão pertencer à mesma coleção? A resposta que se impõe é: "Determine quantos membros tem cada uma, colocando-as em uma mesma coleção se tiverem o mesmo número de membros". Mas isso pressupõe que tenhamos definido os números e saibamos como descobrir quantos termos tem uma coleção. Estamos de tal forma acostumados com a operação de contar que tal pressuposição poderá facilmente passar despercebida. Contudo, a contagem, embora familiar, é de fato uma operação logicamente muito complexa; mais ainda, só se dispõe dela, como meio para descobrir quantos termos tem uma coleção, quando esta é finita. Nossa definição de número não deve admitir de antemão que todos os números sejam finitos; e não podemos, de qualquer modo, sem cair em um círculo vicioso, usar a contagem para definir os números, porque estes são usados na contagem. Necessitamos, portanto, de algum outro método para decidir se duas coleções têm o mesmo número de termos.

Na realidade, é logicamente mais simples descobrir se duas coleções têm o mesmo número de termos do que definir qual é esse número. Um exemplo esclarecerá esse ponto. Se não houvesse poligamia e poliandria em parte alguma do mundo, está claro que o número de maridos vivos a qualquer momento seria exatamente igual ao número de esposas vivas. Não é necessário um censo para nos assegurarmos disso, nem tampouco necessitamos saber o número real de maridos e esposas. Sabemos que o número deve ser igual em ambas as coleções, porque cada marido tem uma esposa e cada esposa tem um marido. A relação entre marido e mulher é chamada relação de "um-para-um".

Uma relação é dita de “um-para-um” quando, se x tem essa relação com y , nenhum outro x' tem a mesma relação com y , e x não tem a mesma relação com qualquer termo y' outro que não y . Quando é preenchida apenas a primeira dessas condições, a relação é chamada de “um-para-muitos”; quando preenchida apenas a segunda, é chamada de “muitos-para-um”. Cabe observar que o número 1 não é usado nessas definições.

Nos países cristãos, a relação entre marido e mulher é de um-para-um; nos países maometanos, é de um-para-muitos; no Tibete, é de muitos-para-um. A relação de pai para filho é de um-para-muitos; a de filho para pai é de muitos-para-um, mas a do filho mais velho para o pai é de um-para-um. Se n é qualquer número, a relação de n para $n+1$ é de um-para-um; também é essa a relação de n para $2n$ ou para $3n$. Quando consideramos apenas números positivos, a relação de n para n^2 é de um-para-um; mas quando são admitidos números negativos, ela se torna de dois-para-um, portanto n e $-n$ têm o mesmo quadrado. Esses exemplos deverão bastar para esclarecer as noções de relações de um-para-um, um-para-muitos e muitos-para-um, as quais desempenham grande papel nos princípios da Matemática, não apenas no tocante à definição dos números como também sob muitos outros aspectos.

Duas classes são ditas “similares” quando há uma relação de um-para-um que correlaciona cada termo de uma classe com um termo da outra classe, do mesmo modo como a relação de casamento correlaciona os maridos com as mulheres. Um poucas definições preliminares ajudarão a enunciar mais precisamente essa definição. A classe dos termos que têm uma determinada relação com algo é chamada o *domínio* daquela relação: assim, os pais são o domínio da relação de pai para filho, os maridos são o domínio da relação de marido para esposa, as esposas são o domínio da relação de esposa para marido, e os maridos e esposas, juntos, são o domínio da relação de casamento. A relação de esposa para marido é chamada a *inversa* da relação de marido para esposa. Do mesmo modo, *menor* é o inverso de *maior*, *mais tarde* é o inverso de *mais cedo*, e assim por diante. De modo geral, o inverso de uma determinada relação é a relação que existe entre y e x sempre que essa relação exista entre x e y . O *domínio inverso* de uma relação é o domínio de seu inverso; assim, a classe das esposas é o domínio inverso da relação de marido para esposa. Podemos agora enunciar assim a nossa definição de similaridade:

Uma classe é dita “similar” a outra quando há uma relação de um-para-um da qual uma classe é o domínio, enquanto a outra é o domínio inverso.

É fácil provar 1) que toda classe é similar a si mesma, 2) que se uma classe α é similar a uma classe β , então β é similar a α , 3) que se α é similar a β e β é similar a γ , então α é similar a γ . Uma relação é dita *reflexiva* quando possui a primeira dessas propriedades, *simétrica* quando possui a segunda, e *transitiva* quando possui a terceira. É óbvio que uma relação que é simétrica e transitiva deve ser reflexiva em todo o seu domínio. As relações que têm essas propriedades são muito importantes, valendo observar que a similaridade é uma relação dessa espécie.

É claro ao censo comum que duas classes finitas têm o mesmo número de termos se são similares, mas não em caso contrário. O ato de contar consiste em estabelecer uma correlação de um-para-um entre o conjunto de objetos contados e os números naturais (excluindo 0) usados no processo. Consequentemente, o senso comum conclui que há tantos objetos no conjunto a ser contado quantos são os números até ao último número usado na contagem. E também sabemos que, enquanto nos restringirmos aos números finitos, haverá exatamente n números de 1 até n . Segue-se que o último número usado na contagem de uma coleção é o número de termos da coleção, desde que a coleção seja finita. Mas esse resultado, além de ser somente aplicável a coleções finitas, pressupõe o fato de duas classes similares terem o mesmo número de termos, e dele depende; pois o que fazemos quando contamos (digamos) 10 objetos é mostrar que o conjunto desses objetos é similar ao conjunto de números de 1 a 10. A noção de similaridade está logicamente pressuposta na operação de contar, sendo logicamente mais simples, embora menos familiar. Na contagem, é necessário tomar os objetos contados em uma certa ordem, como primeiro, segundo, terceiro, etc., mas ordem não é da essência de número: é um acréscimo irrelevante, uma complicação desnecessária do ponto de vista lógico. A noção de similaridade não exige uma ordem: por exemplo, vimos que o número de maridos é o mesmo que o número de esposas, sem termos de estabelecer uma ordem de precedência entre eles. Também não exige que as classes similares sejam finitas. Tomemos, por exemplo, os números naturais (excluindo 0), de um lado, e, de outro, as frações que têm 1 como numerador:

é óbvio que podemos correlacionar 2 com $\frac{1}{2}$, 3 com $\frac{1}{3}$, e assim por diante, provando, assim, que as duas classes são similares.

Podemos assim usar a noção de “similaridade” para decidir se duas coleções deverão pertencer à mesma coleção, no sentido em que levantamos essa questão anteriormente neste capítulo. Queremos formar uma coleção contendo a classe que não tem membro algum: esta será para o número 0. A seguir, queremos uma coleção com todas as classes que têm um membro: esta será para o número 1. A seguir, para o número 2, queremos uma coleção consistindo de todas as duplas; depois, uma de todos os trios, e assim por diante. Dada qualquer coleção, podemos definir a coleção, à qual deve pertencer, como sendo a classe de todas as coleções “similares” a ela. É muito fácil ver-se que se (por exemplo) uma coleção têm três membros, a classe de todas as coleções similares a ela será a classe dos trios. E, seja qual for o número de termos de uma coleção, as coleções que lhe sejam “similares” terão o mesmo número de termos. Podemos tomar essa observação como uma *definição* para “ter o mesmo número de termos”. É óbvio que dá resultados em conformidade com o uso enquanto nos limitamos a coleções finitas.

Até agora não sugerimos coisas nem ao mínimo paradoxais. Mas, quando chegamos à definição real dos números, não podemos evitar o que deverá parecer, à primeira vista, um paradoxo, embora essa impressão logo se desvança. Pensamos, naturalmente, que a classe das duplas (por exemplo) seja algo diferente do número 2. Mas não há dúvida alguma quanto à classe das duplas: é indubitável e não é difícil de definir, enquanto o número 2, em qualquer outro sentido, é uma entidade metafísica de cuja existência jamais podemos estar seguros e cuja pista nunca podemos estar certos haver determinado. É, portanto, mais prudente contentar-nos com a classe das duplas, da qual estamos seguros, do que caçarmos um problemático número 2 que sempre se mostrará fugidivo. Consequentemente, estabelecemos esta definição:

O número de uma classe é a classe de todas as classes similares a ela.

Assim, o número de uma dupla será a classe de todas as duplas. Na verdade, a classe de todas as duplas *será* o número

2, de acordo com a nossa definição. Graças ao emprego de alguma originalidade, essa definição garante precisão e certeza; e não é difícil provar que os números assim definidos têm todas as propriedades que dele esperamos.

Podemos passar agora à definição dos números em geral como sendo qualquer uma das coleções nas quais a similaridade coleciona classes. Um número será um conjunto de classes tais que duas quaisquer sejam similares entre si e nenhuma fora do conjunto seja similar a qualquer uma de dentro do conjunto. Em outras palavras, um número (em geral) é qualquer coleção que é o número de um de seus membros; ou, com simplicidade ainda maior:

Um número é qualquer coisa que seja o número de alguma classe.

Tal definição tem a aparência verbal de ser circular, mas na realidade não o é. Definimos “o número de uma determinada classe” sem usar a noção de número em geral: podemos, portanto, definir número em geral em termos de “o número de uma determinada classe” sem cometer qualquer erro lógico.

As definições dessa espécie são na verdade muito comuns. A classe dos pais, por exemplo, teria de ser definida definindo-se primeiro o que é ser o pai de alguém; a classe dos pais será, então, a de todos os que são pai de alguém. Da mesma forma, se queremos definir os números quadrados (digamos), temos primeiro de definir o que queremos dizer quando afirmamos que um número é o quadrado de outro, e, depois, definir os números quadrados como sendo aqueles que são os quadrados de outros números. Essa espécie de procedimento é muito comum, sendo importante considerar-se que é legítimo e, até com freqüência, necessário.

Apresentamos uma definição de números que servirá para as coleções finitas. Basta ver como poderá servir para as coleções infinitas. Mas temos primeiro de decidir o que queremos dizer por “finito” e “infinito”, o que não pode ser feito dentro dos limites deste capítulo.

CAPÍTULO III

Finitude e indução matemática

A SÉRIE DOS NÚMEROS NATURAIS pode ser inteiramente definida, como vimos no capítulo I, se sabemos o que queremos dizer com os três termos “0”, “número” e “sucessor”. Mas podemos dar mais um passo: podemos definir todos os números naturais se sabemos o que queremos dizer por “0” e “sucessor”. Ser-nos-á de ajuda o compreendermos a diferença entre finito e infinito, para vermos como isso pode ser feito e por que o método pelo qual é feito não pode ser estendido além do finito. Ainda não consideraremos como “0” e “sucessor” devem ser definidos: suporemos, por enquanto, que sabemos o que significam estes termos e mostraremos como, daí, todos os demais números naturais podem ser obtidos.

É fácil ver que podemos atingir qualquer número especificado, digamos, o número 30.000. Primeiro definimos “1” como “o sucessor de 0”, depois definimos “2” como “o sucessor de 1”, e assim por diante. No caso de um número especificado, tal como 30.000, a prova de que poderemos atingi-lo, procedendo passo a passo dessa maneira, pode ser feita, se tivermos a paciência necessária, pela experiência real: podemos continuar até atingirmos realmente 30.000. Mas, conquanto o método experimental seja disponível para cada número natural, dele não nos podemos valer para provar a proposição geral de que *todos* esses números podem ser atingidos dessa maneira, isto é, prosseguindo a partir de 0, passo a passo, de cada número para o seu sucessor. Haverá algum outro modo pelo qual isso possa ser provado?

Consideremos a questão de modo diverso. Quais os números que podem ser atingidos sendo dados os termos “0” e “sucessor”? Haverá algum meio pelo qual possamos definir

toda a classe de tais números? Atingimos 1 como sucessor de 0; 2, como sucessor de 1; 3, como sucessor de 2, e assim por diante. É esse “e assim por diante” que desejamos substituir por algo menos vago e indefinido. Poderemos ser tentados a dizer que “e assim por diante” significa que o processo de passar para o sucessor pode ser repetido *qualquer número finito* de vezes, mas o problema em cuja solução estamos empenhados é o de definir “número finito”, e, portanto, não devemos usar essa noção em nossa definição. Nossa definição não deverá pressupor que saibamos o que seja um número finito.

A chave do nosso problema está na *indução matemática*. Devemos estar lembrados de que, no capítulo I, esta foi a quinta das cinco proposições primitivas que estabelecemos acerca dos números naturais. Essa proposição declara que qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números naturais. Ela foi depois apresentada como um princípio, mas nós a adotaremos agora como uma definição. Não é difícil ver que os termos que a ela obedecem são os mesmos que os números que podem ser atingidos a partir de 0 por passos sucessivos de um número seguinte para o outro seguinte, mas, como a questão é importante, nós a focalizaremos com algum detalhe.

Será bom começarmos com algumas definições, as quais também serão úteis em outros pontos.

Uma propriedade é dita “hereditária” na série dos números naturais se, caso pertença a um número n , também pertencer a $n+1$, o sucessor de n . Da mesma forma, uma classe é dita “hereditária” se, quando n for um membro dessa classe, $n+1$ também o for. É fácil *ver*, embora ainda não se deva admitir saibamos, que o dizer que uma propriedade é hereditária equivale a dizer-se que pertence a todos os números naturais que não seja menor a algum deles, por exemplo, se pertencer a todos os que não sejam menores do que 100, ou a todos os que não sejam menores do que 1.000, ou poderá ser que pertença a todos os que não sejam menores que 0, isto é, a todos, sem exceção.

Uma propriedade é dita “indutiva” quando é uma propriedade hereditária que pertence a 0. Similarmente, uma classe é “indutiva” quando é uma classe hereditária da qual 0 é um membro.

Dada uma classe hereditária da qual 0 é um membro, segue-se que 1 é seu membro, porque uma classe hereditária contém os sucessores de seus membros e 1 é o sucessor de 0. De maneira análoga, dada uma classe hereditária da qual 1 seja um membro, segue-se que 2 é também seu membro, e assim por diante. Podemos assim provar, passo a passo, que qualquer número, digamos 30.000, é um membro de toda classe indutiva.

Definiremos a "posteridade" de um determinado número natural com respeito à relação "predecessor imediato" (que é o inverso de "sucessor") como todos os termos que pertencem a toda classe hereditária à qual o referido número pertence. É novamente fácil ver que a posteridade de um número natural consiste dele próprio e de todos os números naturais maiores do que ele; mas isso também não sabemos oficialmente.

De acordo com as definições acima, a posteridade de 0 consistirá dos termos que pertencem a toda classe indutiva.

Agora não é difícil deixar claro que a posteridade de 0 é o mesmo que o conjunto dos termos que podem ser atingidos a partir de 0 por passos sucessivos do próximo número para o próximo seguinte. Pois, em primeiro lugar, 0 pertence a ambos esses conjuntos (no sentido em que definimos os nossos termos); em segundo lugar, se n pertence a ambos os conjuntos, o mesmo se dá no tocante a $n+1$. Cabe observar que estamos tratando aqui de um tipo de questão que não admite prova precisa, isto é, a comparação entre uma idéia relativamente vaga e outra relativamente precisa. A noção de "termos que podem ser atingidos a partir de 0 por passos sucessivos do próximo número para o próximo seguinte" é vaga, embora *pareça* transmitir um significado definido; por outro lado, a "posteridade de 0" só é precisa e explícita onde a outra é obscura. Poderá ser tomada como o que *intencionávamos* dizer quando falamos dos termos que podem ser atingidos a partir de 0 por passos sucessivos.

Formulamos agora a seguinte definição:

Os "números naturais" são a posteridade de 0 com respeito à relação "predecessor imediato" (que é o inverso de "sucessor").

Chegamos assim a uma definição de uma das três idéias primitivas de Peano em termos das outras duas. Como resul-

tado dessa definição, duas de suas proposições primitivas — isto é, a que assevera que 0 é um número e a que assevera a indução matemática — tornam-se desnecessárias, porquanto resultam da definição. A outra, asseverando que o sucessor de um número natural é um número natural, é apenas necessária sob esta forma enfraquecida: "todo número natural tem um sucessor".

Podemos, naturalmente, definir com facilidade "0" e "sucessor" por meio da definição de número em geral a que chegamos no capítulo II. O número 0 é o número de termos de uma classe que não tem membro algum, isto é, da classe que é chamada "classe vazia". De acordo com a definição geral de número, o número de termos da classe vazia é o conjunto de todas as classes similares à classe vazia, isto é (como é facilmente provável), o conjunto consistindo da classe vazia apenas, isto é, a classe cujo único membro é a classe vazia. (Esta não é idêntica à classe vazia: ela tem um membro, que é a classe vazia, enquanto a classe vazia em si não tem membro algum. Uma classe que tem um membro jamais é idêntica a esse membro, como explicaremos quando tratarmos da teoria das classes.) Assim temos a seguinte definição puramente lógica:

0 é a classe cujo único membro é a classe vazia.

Resta definir "sucessor". Dado qualquer número n , admitamos que a seja uma classe que tenha n membros e que x seja um termo que não é membro de a . Então, a classe consistindo de a com o acréscimo de x terá $n+1$ membros. Assim, temos a seguinte definição:

O sucessor do número de termos da classe a é o número de termos da classe que consiste de a , juntamente com x , em que x é qualquer termo que não pertence à classe.

São necessários certos refinamentos para que esta definição se torne perfeita, mas não nos devemos preocupar com isso agora.* Convém lembrar que já demos (no capítulo II) uma definição lógica do número de termos de uma classe, ou seja,

* Ver *Principia Mathematica*, vol. II. * 110.

nós o definimos como sendo o conjunto de todas as classes similares à classe dada.

Reduzimos assim as três idéias primitivas de Peano a idéias da Lógica: demos definições delas que as tornam precisas, não mais capazes de uma infinidade de significados diferentes, como o eram quando ainda determinadas apenas até ao ponto de obedecer aos cinco axiomas de Peano. Nós retiramos do aparato fundamental de termos que têm de ser meramente apreendidos, e aumentamos assim a articulação dedutiva da Matemática.

Quanto às cinco proposições primitivas, já tivemos êxito em tornar duas delas demonstráveis por nossa definição de "número natural". Que dizer no tocante às três restantes? É muito fácil provar-se que 0 não é o sucessor de número algum e que o sucessor de qualquer número é um número. Mas há uma dificuldade acerca da proposição primitiva restante, isto é, a de que "não há dois números com um mesmo sucessor". Essa dificuldade só surgirá se o número total de indivíduos do universo for finito; pois, sendo dados dois números m e n , nenhum dos quais é o número total de indivíduos do universo, é fácil provar-se que não podemos ter a igualdade $m+1 = n+1$, a não ser que m seja igual a n . Mas suponhamos que o número total de indivíduos do universo fosse (digamos) igual a 10; então, não haveria classe alguma de 11 indivíduos e o número 11 seria a classe vazia. O mesmo o seria o número 12. Dessa forma teríamos $11=12$; portanto, o sucessor de 10 seria o mesmo que o sucessor de 11, embora 10 não fosse o mesmo que 11. Teríamos então dois números diferentes com o mesmo sucessor. Essa falha do terceiro axioma não pode surgir, contudo, se o número de indivíduos do mundo não for finito. Voltaremos ao assunto em etapa posterior.*

Admitindo que o número de indivíduos do universo não seja finito, conseguimos agora não apenas definir as três idéias de Peano, mas também ver como provar suas cinco proposições primitivas por meio de idéias e proposições primitivas pertencentes à Lógica. Segue-se que toda a Matemática pura, no quanto seja deduzível da teoria dos números naturais, é apenas um prolongamento da Lógica. A extensão desse resultado aos ramos modernos da Matemática que não são deduzíveis da

* Veja capítulo XIII.

teoria dos números naturais não oferece dificuldade alguma em princípio, como demonstramos em outro trabalho.*

O processo de indução matemática, por meio do qual definimos os números naturais, é capaz de generalização. Definimos os números naturais como sendo a "posteridade" de 0 com respeito à relação entre um número e seu sucessor imediato. Se chamarmos essa relação de N , qualquer número m terá essa relação com $m+1$. Uma propriedade é "hereditária com respeito a N ", ou simplesmente " N -hereditária", se, quando pertencer a um número m , também pertence a $m+1$, isto é, ao número com o qual m tenha a relação N . E se dirá que um número n pertence à "posteridade" de m com respeito à relação N se n tiver todas as propriedades N -hereditárias pertencentes a m . Essas definições podem ser todas aplicadas a qualquer outra relação tanto quanto a N . Assim, se R for uma relação qualquer, podemos estabelecer as seguintes definições:**

Uma propriedade é chamada " R -hereditária quando, se ela pertencer a um termo x , e x tiver a relação R com y , então ela pertence a y .

Uma classe é R -hereditária quando sua propriedade definidora for R -hereditária.

Diz-se que um termo x é " R -ancestral" do termo y se y tiver toda propriedade R -hereditária que x tiver, desde que x seja um termo que tenha a relação R com alguma coisa ou com o qual alguma coisa tenha a relação R . (Isso visa apenas a excluir os casos triviais.)

A " R -posteridade" de x são todos os termos dos quais x seja um R -ancestral.

Estruturamos as definições acima de forma que, se um termo for o ancestral de alguma coisa, ele seja seu próprio ancestral e pertença à sua própria posteridade. Isso por mera conveniência.

* No tocante à Geometria, no quanto não seja puramente analítica, ver *Principles of Mathematics*, parte VI; para a dinâmica racional, *ibid.*, parte VII.

** Essas definições bem como a teoria generalizada da indução são de FREGE e foram publicadas no remoto ano de 1879 em seu *Begriffsschrift*. A despeito do grande valor desse trabalho, fui, creio, a primeira pessoa que o leu — mais de vinte anos após a sua publicação.

Cabe observar que, se adotarmos para R a relação “um-dos-pais”, “ancestral” e “posteridade” terão os significados usuais, exceto que uma pessoa será incluída entre seus ancestrais e entre sua posteridade. É óbvio, de imediato, que “ancestral” deve ser capaz de definição em termos de “um-dos-pais”, mas, enquanto Frege não tivesse desenvolvido sua teoria generalizada da indução, ninguém poderia ter definido “ancestral” precisamente em termos de “um-dos-pais”. Uma ligeira consideração desse ponto servirá para mostrar a importância da teoria. Uma pessoa que se defrontasse pela primeira vez com o problema de definir “ancestral” em termos de “um-dos-pais” naturalmente diria que A será um ancestral de Z se houver, entre A e Z , um certo número de pessoas $B, C, \dots$, sendo B filho de A , sendo cada um-dos-pais do seguinte, até ao último, que é um-dos-pais de Z . Mas essa definição não será adequada, a menos que acrescentemos que o número de termos intermediários tem de ser finito. Vejamos, por exemplo, uma série como a seguinte:

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1.$$

Temos aqui, primeiro, uma série de frações negativas sem fim e, depois, uma série de frações positivas sem começo. Poderemos dizer que, nessa série, $-\frac{1}{8}$ é um ancestral de $\frac{1}{8}$? Assim o será de acordo com a definição de primeiro elemento acima sugerida, mas não o será segundo qualquer definição que dê a espécie de idéia que desejamos definir. Para esse propósito, é essencial que o número de intermediários seja finito. Mas, como vimos, “finito” tem de ser definido por meio de indução matemática, e é mais simples definir de uma vez a relação de ancestral de modo geral do que defini-la primeiro para o caso da relação entre n e $n+1$ e depois estendê-la a outros casos. Constatar-se-á aqui, como sói acontecer constantemente em outras situações, que a generalidade de início, conquanto exigindo mais raciocínio desde o princípio, economizará raciocínio e aumentará o poder lógico a longo prazo.

O uso da indução matemática nas demonstrações teve, no passado, algo de misterioso. Não parecia haver dúvida razoável alguma quanto a que fosse um método válido de prova, mas ninguém sabia bem porque era válido. Alguns acreditavam

que fosse realmente um caso de indução, no sentido em que essa palavra é usada em Lógica. Poincaré* considerou-a um princípio da mais alta importância, por meio do qual um número infinito de silogismos podia ser condensado em um argumento. Sabemos hoje que todos esses pontos de vista eram errados e que a indução matemática é uma definição e não um princípio. Há alguns números aos quais pode ser aplicada e outros (como veremos no capítulo VIII) aos quais não o pode. Definimos os “números naturais” como aqueles aos quais as provas por indução matemática podem ser aplicadas, isto é, aqueles que possuem todas as propriedades indutivas. Segue-se que tais provas não podem ser aplicadas aos números naturais em virtude de qualquer intuição ou axioma ou princípios misteriosos, mas como uma proposição puramente verbal. Se os “quadrúpedes” são definidos como animais de quatro pés, seguir-se-á que os que têm quatro pés são quadrúpedes; e o caso dos números que obedecem à indução matemática é exatamente similar.

Usaremos a expressão “números indutivos” para designar o mesmo conjunto que vimos até agora chamando “números naturais”. A expressão “números indutivos” é preferível por representar um lembrete de que a definição desse conjunto de números é obtida da indução matemática.

A indução matemática possibilita, acima de tudo, a característica essencial pela qual o finito é distinguido do infinito. O princípio da indução matemática pode ser enunciado em forma popular mais ou menos do seguinte modo: “o que pode ser inferido do seguinte para o seguinte pode ser inferido do primeiro ao último”. Isso é verdadeiro quando o número de passos intermediários entre o primeiro e o último é finito e não em caso contrário. Quem alguma vez observou um trem de carga se pôr em movimento terá notado que o impulso é comunicado com um solavanco de cada vagão ao vagão seguinte, até que finalmente inclusive o último vagão é posto em movimento. Quando a composição é muito grande, leva muito tempo para que o último vagão se mova. Se o trem fosse infinitamente longo, haveria uma sucessão infinita de solavancos e jamais chegaria o momento em que toda a composição estaria em movimento. Não obstante, se houvesse uma série de vagões que não fosse maior do que a série dos números indutivos (a

* *Science et Méthode*, capítulo IV.

qual, como veremos, é uma instância do menor dos infinitos), todo vagão começaria a mover-se, mais cedo ou mais tarde, se a locomotiva perseverasse, a despeito do fato de que haveria outros vagões mais distantes na traseira que ainda não teriam começado a se mover. Essa imagem ajudará a elucidar o argumento do seguinte para o seguinte e sua conexão com a finitude. Ao abordarmos os números infinitos, quando os argumentos da indução matemática não mais serão válidos, as propriedades de tais números ajudarão a estabelecer, por contraste, o uso quase inconsciente que é feito da indução matemática no que tange aos números finitos.

CAPÍTULO IV

Definição de ordem

JÁ LEVAMOS A NOSSA ANÁLISE da série dos números naturais até ao ponto de obtermos definições lógicas dos membros dessa série, de toda a classe de seus membros e da relação de um número com seu sucessor imediato. Devemos, agora, considerar o caráter *serial* dos números naturais na ordem 0, 1, 2, 3, ... Normalmente, pensamos nos números como se apresentando nessa *ordem*, e constitui parte essencial do trabalho de analisar os nossos dados buscar uma definição de "ordem" ou "série" em termos lógicos.

A noção de ordem tem importância enorme em Matemática. Não apenas os inteiros, mas também as frações racionais e todos os números reais têm uma ordem de grandeza, e isso é essencial à maior parte de suas propriedades matemáticas. A ordem dos pontos em uma linha é essencial à Geometria; o mesmo se dá no tocante à ordem ligeiramente mais complicada das linhas que passam por um ponto em um plano ou da interseção dos planos em uma linha. As dimensões são, em Geometria, um desenvolvimento da ordem. A concepção de *limite*, que alicerça toda a Matemática superior, é uma concepção serial. Há partes da Matemática que não dependem da noção de ordem, mas são pouquíssimas em comparação com as partes em que está envolvida essa noção.

Ao buscar uma definição de ordem, a primeira coisa a considerar é que nenhum conjunto de termos tem apenas *uma* ordem à exclusão de outras. Um conjunto de termos tem todas as ordens de que é capaz. Por vezes uma ordem é tão mais familiar e natural aos nossos pensamentos que somos propensos a considerá-la a ordem daquele conjunto de termos; isso é um erro. Os números naturais — ou os números "indutivos", como também os chamaremos — nos ocorrem mais

prontamente na ordem de grandeza; mas são capazes de um número infinito de outros arranjos. Podemos, por exemplo, considerar todos os números ímpares e depois todos os números pares; ou primeiro 1 e depois todos os números pares, a seguir todos os múltiplos ímpares de 3, então todos os múltiplos de 5, mas não de 2 ou 3, então todos os múltiplos de 7, mas não os de 2 ou 3 ou 5, e assim por diante, através de toda a série dos primos. Quando dizemos que “arranjamos” os números nessas várias ordens, formulamos uma declaração imprecisa: o que realmente fazemos é voltar a nossa atenção para certas relações entre os números naturais, os quais geram, eles próprios, tais e tais arranjos. A nós nos é tão impossível “arranjar” os números naturais quanto os céus estrelados; mas assim como podemos notar entre as estrelas fixas uma ordem de luminosidade ou sua distribuição no céu, assim também podemos observar as várias relações entre os números, as quais dão surgimento a várias ordens diferentes entre eles, todas igualmente legítimas. E o que é verdadeiro no tocante aos números o é também relativamente aos pontos em uma linha ou aos momentos de tempo: uma ordem é mais familiar, mas outras são igualmente válidas. Podemos, por exemplo, considerar primeiro, sobre uma linha, todos os pontos que têm coordenadas inteiras, depois todos os que têm coordenadas racionais não-inteiras, depois todos os que têm coordenadas algébricas não-racionais, e assim por diante, através de qualquer conjunto de complicações que nos aprouver. A ordem resultante será uma das que os pontos de uma linha certamente têm, quer decidamos ou não notá-los; a única coisa arbitrária acerca das várias ordens de um conjunto de termos é a nossa atenção, pois os próprios termos têm sempre todas as ordens de que são capazes.

Essa consideração tem como resultado importante o não devermos buscar a definição de ordem na natureza do conjunto de termos a ser ordenado, porquanto um conjunto de termos tem muitas ordens. A ordem não está na classe dos termos, mas em relação entre os membros da classe, a despeito de cuja relação alguns parecem vir primeiro e outros depois. O fato de uma classe poder ter muitas ordens resulta de poder haver muitas relações entre os membros de uma única classe. Que propriedades deve ter uma relação a fim de dar origem a uma ordem?

As características essenciais de uma relação que devem dar origem a uma ordem podem ser descobertas considerando-se

que, com respeito a tal relação, devemos poder dizer, de quaisquer dois termos da classe a serem ordenados, que um “precede” e o outro “sucede”. Mas, para que possamos usar essas palavras da maneira em que nós naturalmente a compreenderíamos, torna-se necessário que a relação ordenadora tenha três propriedades:

1) Se x precede y , y não deve também preceder x . Esta é uma característica óbvia das espécies de relação que levam às séries. Se x é menor do que y , y não é menor do que x . Se x é anterior no tempo a y , y não deve ser também anterior no tempo a x . Se x está à esquerda de y , y não deve estar à esquerda de x . Por outro lado, as relações que não dão origem a séries frequentemente não têm essa propriedade. Se x é um irmão ou irmã de y , y é um irmão ou irmã de x . Se x é da mesma altura que y , y é da mesma altura que x . Se x é de altura diferente de y , y é de altura diferente de x . Em todos estes casos, quando a relação se verifica entre x e y , se verifica entre y e x . Mas tal coisa não pode acontecer no tocante às relações seriais. Uma relação que tenha essa primeira propriedade é chamada *assimétrica*.

2) Se x precede y e y precede z , x deve preceder z . Esta característica pode ser ilustrada pelas mesmas instâncias anteriores: *menor*, *anterior*, *à esquerda de*. Mas somente duas de nossas três instâncias anteriores servirão como instâncias de relações que não têm essa propriedade. Se x é irmão ou irmã de y e y o é de z , x pode não ser irmão ou irmã de z , porquanto x e z podem ser a mesma pessoa. O mesmo se aplica às diferenças de altura, mas não à igualdade de altura, que tem a nossa segunda propriedade, mas não a primeira. A relação “pai”, por outro lado, tem a nossa primeira propriedade, mas não a segunda. Uma relação que tenha a nossa segunda propriedade é chamada *transitiva*.

3) Dados quaisquer dois termos da classe a ser ordenada, deve haver um que precede e outro que sucede. Por exemplo, de dois inteiros ou frações ou números reais quaisquer, um é menor e o outro é maior; mas o mesmo não se verifica no tocante a dois números complexos. De dois momentos de tempo quaisquer, um deve ser anterior ao outro; mas o mesmo não pode ser dito de dois eventos, porquanto podem ser simultâneos. De dois pontos em uma linha, um deve estar à esquerda do outro. Uma relação que tenha essa terceira propriedade é chamada *conexa*.

Quando uma relação possui essas três propriedades, é da espécie que dá origem a uma ordem entre os termos dentre os quais ela se verifica; e sempre que existe uma ordem, pode ser encontrada como sua geradora uma relação tendo essas três propriedades.

Apresentaremos algumas definições antes de ilustrar essa tese:

1) Diz-se que uma relação é aliorrelativa* ou que *está contida em* ou que *implica diversidade* se nenhum termo tem essa relação consigo mesmo. Assim, por exemplo, "maior", "diferente em tamanho", "irmão", "marido", "pai" são aliorrelativas; mas "igual", "nascidos dos mesmos pais", "caro amigo", não o são.

2) O *quadrado* de uma relação é a relação que se verifica entre dois termos x e y e entre y e z . Assim, "avô paterno" é o quadrado de "pai", "maior por dois" é o quadrado de "maior por um", e assim por diante.

3) O *domínio* de uma relação consiste de todos aqueles termos que têm essa relação com alguma coisa, e o *domínio inverso* consiste de todos aqueles termos com os quais uma coisa ou outra tem essa relação. Essas palavras já foram definidas, mas são aqui lembradas a bem da seguinte definição:

4) O *campo* de uma relação consiste de seu domínio e de seu domínio inverso, juntos.

5) Diz-se que uma relação *contém* ou é implicada por outra se ela se verifica sempre que a outra se verifica.

Ver-se-á que uma relação *assimétrica* é o mesmo que uma relação cujo quadrado é uma aliorrelativa. Acontece frequentemente que uma relação é uma aliorrelativa sem ser assimétrica, embora uma relação assimétrica seja sempre aliorrelativa. Por exemplo, "cônjuge" é aliorrelativa mas é simétrica, porquanto se x é cônjuge de y , y é cônjuge de x . Mas entre as relações *transitivas*, todas as aliorrelativas são assimétricas, bem como vice-versa.

Pode-se ver das definições que uma relação *transitiva* é uma relação que é implicada por seu quadrado, ou, como também se pode dizer, "contém" seu quadrado. Assim, "ancestral" é

transitiva, porque o ancestral de um ancestral é um ancestral; mas "pai" não é transitiva, porque o pai de um pai não é um pai. Uma relação transitiva aliorrelativa é uma relação que contém o seu quadrado e é contida em diversidade; ou, o que vem a ser a mesma coisa, uma cujo quadrado implica tanto ela quanto a diversidade — porque, quando uma relação é transitiva, assimetria equivale a ser aliorrelativa.

Uma relação é *conexa* quando, dados dois termos diferentes de seu campo, a relação se verifica entre o primeiro e o segundo ou entre o segundo e o primeiro (não excluindo a possibilidade de que as duas coisas possam acontecer, embora ambas não possam ocorrer se a relação é assimétrica).

Ver-se-á que a relação "ancestral", por exemplo, é aliorrelativa e transitiva, mas não conexa; é pelo fato de não ser conexa que ela não basta para arranjar a espécie humana numa série.

A relação "menor do que ou igual a", entre números, é transitiva e conexa, mas não assimétrica ou aliorrelativa.

A relação "maior ou menor", entre números, é aliorrelativa e conexa, mas não é transitiva, porque se x é maior ou menor do que y , e y é maior ou menor do que z , pode acontecer que x e z sejam o mesmo número.

Assim, as três propriedades de ser: 1) aliorrelativa, 2) transitiva e 3) conexa são mutuamente independentes, porquanto uma relação pode ter duas quaisquer delas sem ter a terceira.

Estabelecemos agora a seguinte definição:

Uma relação é *serial* quando é aliorrelativa, transitiva e conexa; ou, o que é equivalente, quando é assimétrica, transitiva e conexa.

Uma *série* é a mesma coisa que uma relação serial.

Poder-se-á ter pensado que uma série seja o *campo* de uma relação serial e não a relação serial em si. Mas isso seria um erro. Por exemplo,

1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 3, 2, 1

são seis séries diferentes que têm, todas, o mesmo campo. Se o campo fosse a série, só poderia haver uma série com um determinado campo. O que distingue as seis séries acima é simplesmente a relação ordenadora nos seis casos. Dada a relação

* Esse termo se deve a G. S. PEIRCE.

ordenadora, o campo e a ordem ficam ambos determinados. Assim, pode-se tomar a série como *sendo* a relação de ordenação, mas o mesmo não se pode fazer com o campo.

Dada qualquer relação serial, digamos P , diremos que, com respeito a essa relação, x "precede" y se x tem a relação P com y , condição que escreveremos " xPy ", para simplificar. São as seguintes as características que P deve ter para ser serial:

- 1) Jamais deveremos ter xPx , isto é, nenhum termo deve preceder a si mesmo.
- 2) P^2 deve implicar P , isto é, se x precede y e y precede z , x deve preceder z .
- 3) Se x e y são dois termos diferentes do campo de P , devemos ter xPy ou yPx , isto é, um dos dois deve preceder o outro.

O leitor poderá facilmente convencer-se de que, quando essas três propriedades forem encontradas em uma relação ordenadora, as características que esperamos de uma série também o serão e vice-versa. Estamos, portanto, justificados ao tomarmos essa observação para definição de ordem ou série. E cabe observar que a definição é efetuada em termos puramente lógicos.

Embora sempre exista uma relação transitiva assimétrica conexa onde haja uma série, nem sempre a relação seria mais naturalmente considerada geradora da série. A série dos números naturais pode servir de ilustração. A relação que admitimos ao considerar os números naturais foi a de sucessão imediata, isto é, a relação entre inteiros consecutivos. Essa relação é assimétrica, mas não transitiva ou conexa. Podemos, portanto, derivar dela, pelo método da indução matemática, a relação "ancestral" que consideramos no capítulo anterior. Essa relação será a mesma que a de "menor do que ou igual a" entre os inteiros indutivos. Com o propósito de gerar a série dos números naturais, queremos a relação "menor do que", excluindo "igual a". Essa é a relação de m para n quando m é um ancestral de n , mas não é idêntico a n , ou (o que vem a ser a mesma coisa) quando o sucessor de m é um ancestral de n no sentido em que um número é seu próprio ancestral. Equivale a dizer, devemos estabelecer a seguinte definição:

Diz-se que um número indutivo m é *menor do que* outro número n quando n possui todas as propriedades hereditárias possuídas pelo sucessor de m .

É fácil ver-se e não é difícil de se provar que a relação "menor do que", assim definida, é assimétrica, transitiva e conexa e tem como campo os números indutivos. Assim, os números indutivos adquirem, por meio dessa relação, uma ordem no sentido em que definimos o termo "ordem", e essa ordem é chamada ordem "natural" ou ordem de grandeza.

A geração de séries por meio de relações mais ou menos semelhantes à que existe entre n e $n+1$ é muito comum. A série dos Reis da Inglaterra, por exemplo, é gerada por relações de cada um com seu sucessor. Esta é, provavelmente, a maneira mais fácil, quando aplicável, de se conceber a geração de uma série. Nesse método, passamos de cada termo para o próximo seguinte, enquanto há um seguinte, ou regredimos para o próximo anterior, enquanto houver um antes. Esse método sempre exige a forma generalizada da indução matemática para nos permitir definir "anterior" e "posterior" em uma série assim gerada. Quanto à analogia das frações próprias daremos o nome de "posteridade própria de x com respeito a R " à classe dos termos que pertencem à R -posteridade de algum termo com o qual x tem a relação R , no sentido que demos antes à "posteridade", que inclui um termo em sua própria posteridade. Voltando às definições fundamentais, constatamos que a "posteridade própria" pode ser assim definida:

A "posteridade própria" de x com respeito a R consiste de todos os termos que possuem todas as propriedades R -hereditárias possuídas por todos os termos com os quais x tem a relação R .

Cabe observar que essa definição tem de ser assim estruturada para que possa ser aplicável não apenas quando exista apenas um termo com o qual x tenha a relação R , mas também nos casos (como em geral o de pai e filho) nos quais pode haver muitos termos com os quais x tenha a relação R . Definimos ainda:

Um termo x é um "ancestral próprio" de y com respeito a R se y pertence à posteridade própria de x com respeito a R .

Empregaremos, a bem da brevidade, " R -posteridade" e " R -ancestral" quando estes termos pareçam mais convenientes.

Revertendo agora à geração de séries pela relação R entre termos consecutivos, vemos que, para que esse método seja possível, a relação " R -ancestral própria" deve ser aliorrelativa, transitiva e conexa. Em que circunstâncias isso ocorrerá? Ela será sempre transitiva; independentemente da espécie de relação

que R possa ser, " R -ancestral" e " R -ancestral própria" serão sempre, ambas, transitivas. Mas somente em certas circunstâncias será aliorrelativa e conexa. Considere-se, por exemplo, a relação com o vizinho da esquerda, ao redor da mesa em um jantar de que participem doze pessoas. Se chamarmos essa relação R , a R -posteridade própria de uma pessoa consiste de todos os que podem ser atingidos pelo deslocamento ao redor da mesa, da direita para a esquerda. Ficam incluídos todos os que se encontram à mesa, inclusive a própria pessoa que serviu de ponto inicial, porquanto doze pessoas nos trazem de volta ao ponto de partida. Assim, nesse caso, embora a relação " R -ancestral própria" seja conexa e a própria R seja aliorrelativa, não obtemos uma série, porque " R -ancestral própria" não é aliorrelativa. É por essa razão que não podemos dizer que uma pessoa está antes da outra com respeito à relação "à direita de" ou à sua derivativa ancestral.

O caso acima é uma instância em que a relação ancestral era conexa, mas não contida na diversidade. Uma instância em que ela é contida na diversidade, mas não conexa, é derivada a partir do sentido ordinário da palavra "ancestral". Se x é um ancestral próprio de y , x e y não podem ser a mesma pessoa; mas não é verdadeiro que, de duas pessoas, uma deva ser um ancestral da outra.

A questão das circunstâncias nas quais as séries podem ser geradas por relações ancestrais derivadas a partir de relações de consecutividade é com frequência importante. Eis alguns dos casos mais importantes: Admitamos que R seja uma relação de muitos-para-um e limitemos a nossa atenção à posteridade de algum termo x . Quando assim limitada, a relação " R -ancestral própria" deve ser conexa; portanto, tudo o que falta garantir para que seja serial é que seja contida em diversidade. Trata-se de uma generalização da instância da mesa de jantar. Outra generalização consiste em fazer que R seja uma relação de um-para-um, e incluindo tanto a ancestralidade como a posteridade de x . Aqui, novamente, a única condição exigida para garantir a geração de uma série é que a relação " R -ancestral própria" seja contida em diversidade.

A geração da ordem por meio de relações de consecutividade, conquanto importante em sua própria esfera, é menos geral do que o método que usa uma relação transitiva para definir a ordem. Acontece frequentemente haver em uma série um número infinito de termos intermediários entre dois quaisquer

que possam ser relacionados, por mais próximos que estejam entre si. Vejamos, por exemplo, as frações em ordem de grandeza. Entre duas frações quaisquer há outras — por exemplo, a média aritmética das duas. Conseqüentemente, não há um par de frações consecutivas. Se dependêssemos da consecutividade para definir ordem, estaríamos impossibilitados de definir a ordem de grandeza entre frações. Mas na verdade as relações de maior e menor, entre frações, não exigem geração a partir da relação de consecutividade, e as relações de maior e menor entre frações têm as três características de que necessitamos para definir as relações seriais. Em todos esses casos a ordem deve ser definida por meio de uma relação *transitiva*, porquanto somente essa relação é capaz de franquear um número infinito de termos intermediários. O método da consecutividade, como o da contagem para a determinação do número de uma coleção, é apropriado ao finito; pode ser até estendido a certas séries infinitas, isto é, àquelas em que, embora o número total de termos seja infinito, o número de termos entre quaisquer dois é sempre finito; mas tal fato não deve ser considerado geral. E não apenas isso: deve-se tomar cuidado para erradicar da imaginação todos os hábitos de pensamento resultantes da suposição de que seja geral. Se isso não for feito, as séries nas quais não há termos consecutivos permanecerão difíceis e embaraçosas. E tais séries são de importância vital para o entendimento de continuidade, espaço, tempo e movimento.

Há várias maneiras pelas quais as séries podem ser geradas, mas todas dependem da descoberta ou da construção de uma relação assimétrica transitiva conexa. Algumas dessas maneiras têm importância considerável. Podemos tomar como exemplo a geração de séries por meio de uma relação de termos que podemos chamar relação "entre". Esse método é muito útil em Geometria e pode servir como uma introdução às relações que têm mais de dois termos; é melhor entendida em conexão com a Geometria elementar.

Dados três pontos quaisquer sobre uma reta no espaço ordinário, deve haver um deles que esteja entre os outros dois. Tal não se dará com os pontos sobre um círculo ou sobre qualquer outra curva fechada, porque, dados três pontos quaisquer sobre um círculo, podemos deslocar-nos de qualquer um deles para qualquer um dos outros sem passar pelo terceiro. Na verdade, a noção de "entre" é característica das séries abertas — ou séries no sentido estrito — em contraste com o que

podemos chamar séries “cíclicas”, nas quais como no caso das pessoas ao redor da mesa de jantar, uma volta suficiente nos traz ao nosso ponto de partida. Essa noção de “entre” pode ser escolhida como noção fundamental da Geometria ordinária; mas no momento consideraremos apenas sua aplicação a uma única linha reta e à ordenação dos pontos sobre uma linha reta.* Tomando-se dois pontos quaisquer a , b , a linha ($a-b$) consiste de três partes (além dos próprios a e b):

- 1) Os pontos entre a e b .
- 2) Os pontos x tais quais que a está entre x e b .
- 3) Os pontos y tais que b está entre y e a .

A linha ($a-b$) pode ser, assim, definida em termos da relação “entre”.

Para que essa relação “entre” possa arranjar os pontos da linha em uma ordem da direita para a esquerda, necessitamos de certas suposições, quais sejam:

- 1) Se algo está entre a e b , a e b não são idênticos.
- 2) Algo que esteja entre a e b está também entre b e a .
- 3) Algo que esteja entre a e b não é idêntico a a (nem, conseqüentemente, a b , em virtude de 2).
- 4) Se x está entre a e b , algo que esteja entre a e x está também entre a e b .
- 5) Se x está entre a e b , e b está entre x e y , então b está entre a e y .
- 6) Se x e y estão entre a e b , então ou x e y são idênticos ou x está entre a e y , ou x está entre y e b .
- 7) Se b está entre a e x e também entre a e y , então ou x e y são idênticos, ou x está entre b e y , ou y está entre b e x .

Essas sete propriedades são obviamente verificadas no caso de pontos sobre uma linha reta no espaço ordinário. Qualquer relação de três termos que as verifique dá origem a séries, como pode ser visto nas definições que se seguem. A bem da clareza, admitamos que a esteja à esquerda de b . Então, os pontos da

* Cf. *Rivista di Matematica*, IV, pp. 55 ss.; *Principles of Mathematics*, p. 394 (parág. 375).

linha (ab) são 1) aqueles que, entre eles e b , se encontra a — destes diremos que estão à esquerda de a ; 2) o próprio a ; 3) aqueles entre a e b ; 4) o próprio b ; 5) aqueles que, entre eles e a , se encontra b — destes diremos que estão à direita de b . Podemos agora explicar de modo geral que, de dois pontos x e y , sobre a linha (ab), diremos que x está “à esquerda” de y em qualquer dos seguintes casos:

- 1) Quando x e y estão ambos à esquerda de a , e y entre x e a .
- 2) Quando x está à esquerda de a , e y é a ou b ou está entre a e b ou à direita de b .
- 3) Quando x é a , e y está entre a e b ou é b ou está à direita de b .
- 4) Quando x e y estão ambos entre a e b , e y está entre x e b .
- 5) Quando x está entre a e b , e y é b ou está à direita de b .
- 6) Quando x é b , e y está à direita de b .
- 7) Quando x e y estão ambos à direita de b , e x está entre b e y .

Constatar-se-á que, das sete propriedades que atribuímos à relação “entre”, se pode deduzir que a relação “à esquerda de”, conforme acima definida, é uma relação *serial* tal como definimos esse termo. É importante observar que nada nas definições ou no argumento depende de que queiramos dizer por “entre” a relação real daquele nome que ocorre no espaço empírico: qualquer relação de três termos tendo as sete propriedades puramente formais servirá igualmente bem ao propósito do argumento.

A ordem cíclica, tal como a dos pontos em um círculo, não pode ser gerada por meio de relações de três termos da espécie “entre”. Necessitamos de uma relação de quatro termos, que poderá ser chamada “separação de duplas”. Esse ponto pode ser ilustrado por uma viagem em volta ao mundo. Pode-se ir da Inglaterra à Nova Zelândia via Canal de Suez ou via São Francisco; não podemos dizer definitivamente que qualquer desses dois lugares esteja “entre” a Inglaterra e a Nova Zelândia. Mas se um homem escolher essa rota para fazer a volta ao mundo, seja qual for a via que escolher, os seus momentos na Inglaterra e na Nova Zelândia estão separados entre si por seus momentos em Suez e em São Francisco, e vice-versa. Gene-

realizando, se tomarmos quatro pontos quaisquer sobre um círculo, podemos separá-los em duas duplas, digamos a e b e x e y , tais que a fim de passar de a para b tenhamos de passar por x ou por y e a fim de passar de x para y tenhamos de passar por a ou por b . Nessas circunstâncias dizemos que a dupla (a, b) está "separada" pela dupla (x, y) . Dessa relação pode ser gerada uma ordem cíclica, de uma forma que se assemelha àquela em que geramos uma ordem aberta de "entre", porém algo mais complicada.*

O propósito da segunda metade deste capítulo foi sugerir o assunto que se poderia chamar "geração de relações seriais". Uma vez definidas essas relações, a geração delas, resultante de outras relações possuindo apenas algumas das propriedades exigidas para as séries, se torna muito importante, especialmente na Filosofia da Geometria e da Física. Mas não podemos, dentro dos limites deste volume, fazer mais do que tornar o leitor cômico de que tal assunto existe.

CAPÍTULO V

Espécies de relações

UMA GRANDE PARTE da Filosofia Matemática se ocupa das relações, e muitas espécies diferentes de relações têm diferentes usos. Acontece freqüentemente que uma propriedade que pertence a todas as relações só é importante no tocante a relações de certos gêneros; nesses casos o leitor não verá o alcance da proposição asserindo tal propriedade, a menos que tenha em mente os gêneros de relações para as quais ela seja útil. Por motivo desta descrição, bem como por causa do interesse intrínseco do assunto, é bom termos em mente uma ligeira lista das variedades de relações matematicamente mais úteis.

Tratamos, no capítulo anterior, de uma classe supremamente importante, isto é, as relações *seriais*. Cada uma das três propriedades que combinamos para definir as séries — isto é, *assimetria*, *transitividade* e *conexidade* — tem sua importância. Começaremos por dizer algo sobre cada uma delas.

Assimetria, isto é, a propriedade de ser incompatível com o inverso, é uma característica do mais alto interesse e importância. A fim de desenvolver suas funções, consideraremos vários exemplos. A relação *marido* é assimétrica, o mesmo se dando com a relação *esposa*; isto é, se a é marido de b , b não pode ser marido de a , o mesmo se dando no tocante a *esposa*. Por outro lado, a relação "cônjuge" é simétrica: se a é cônjuge de b , então b é cônjuge de a . Suponhamos agora que nos seja dada a relação *cônjuge* e desejemos derivar a relação *marido*. *Marido* é o mesmo que *cônjuge masculino* ou *cônjuge* de uma mulher; assim, a relação *marido* pode ser derivada de *cônjuge* pela limitação ao domínio dos homens ou pela limitação ao inverso das mulheres. Vemos a partir dessa instância que, quando é dada uma relação simétrica, é por vezes possível, sem a ajuda de qualquer outra relação, separá-la em duas relações

* Cf. *Principles of Mathematics*, p. 205 (parág. 194) e referências aí fornecidas.

assimétricas. Mas os casos em que isso é possível são raros e excepcionais: são casos em que há duas classes mutuamente exclusivas, digamos α e β , tais que, sempre que a relação existe entre os dois termos, um dos termos é um membro de α e o outro é um membro de β — como, no caso de *cônjuge*, um termo da relação pertence à classe dos homens e o outro à classe das mulheres. Em tal caso, a relação com o seu domínio confinado a α será assimétrica, o mesmo sendo a relação com seu domínio confinado a β . Mas esses casos não ocorrem quando tratamos de séries de mais de dois termos; porque em uma série, todos os termos, exceto o primeiro e o último (se estes existem), pertencem tanto ao domínio como ao domínio inverso da relação geradora, de modo que uma relação como a de *marido*, na qual o domínio e o domínio inverso não se interceptam, está excluída.

A questão de como *construir* relações tendo alguma propriedade útil, por meio de operações sobre relações que apenas têm rudimentos daquela propriedade, tem considerável importância. A transitividade e a conexidade são facilmente construídas em muitos casos nos quais as relações originalmente dadas não as possuem: por exemplo, se R é uma relação qualquer, a relação ancestral derivada a partir de R por indução generalizada é transitiva; e se R é uma relação de muitos-para-um, a relação ancestral será conexa se confinada à posteridade de um termo dado. Mas a assimetria é uma propriedade muito mais difícil de se garantir por construção. O método pelo qual derivamos *marido* de *cônjuge* não é, como vimos, disponível nos casos mais importantes, tais como *maior*, *anterior* e *à direita de*, nos quais o domínio e o domínio inverso se interceptam. Em todos esses casos, podemos, naturalmente, obter uma relação simétrica somando a relação dada e seu inverso, mas não podemos voltar dessa relação simétrica para a relação assimétrica original, exceto com a ajuda de alguma relação assimétrica. Tomemos, por exemplo, a relação *maior*: a relação *maior ou menor* — isto é, *desigual* — é simétrica, mas nada há nessa relação a mostrar que ela seja a soma de duas relações assimétricas. Tomemos uma relação como a de diferente em formato". Não se trata da soma de uma relação assimétrica e seu inverso, porquanto as formas não constituem uma única série; mas nada há a mostrar que ela difira de "diferente em grandeza" e disso não saberíamos se ignorássemos que as grandezas têm relações de maior ou menor. Isso ilustra o caráter fundamental da assimetria como uma propriedade das relações.

Do ponto de vista da classificação das relações, ser assimétrico é característica muito mais importante do que implicar diversidade. As relações assimétricas implicam diversidade, mas o inverso não é verdadeiro. "Desigual", por exemplo, implica diversidade, mas é simétrica. De modo geral, podemos dizer que, se quiséssemos, poderíamos dispensar ao máximo possível as proposições relacionais, substituindo-as pelas que atribuíssem predicados aos sujeitos, desde que nos limitássemos às relações *simétricas*: aquelas que não implicam diversidade podem, caso sejam transitivas, ser consideradas como asserindo um predicado comum, enquanto as que implicam diversidade podem ser consideradas como asserindo predicados incompatíveis. Por exemplo, considere-se a relação de *similaridade entre classes*, por meio da qual já definimos os números. Essa relação é simétrica e transitiva e não implica diversidade. Seria possível, embora menos simples do que o procedimento que adotamos, considerar o número de uma coleção como um predicado da coleção: então, duas classes similares serão duas que têm o mesmo predicado numérico, enquanto duas que não são similares serão duas que têm predicados numéricos diferentes. Esse método de substituir relações por predicados é formalmente possível (embora com frequência muito inconveniente) enquanto as relações do caso forem simétricas; mas é formalmente impossível quando elas são assimétricas, porque tanto a mesmidade (*sameness*) como a diferença de predicados são simétricas. As relações assimétricas são, podemos dizer, as relações mais caracteristicamente relacionais e as mais importantes para o filósofo que deseje estudar a natureza lógica última das relações.

Outra classe de relações que são do maior uso é a das relações de um-para-muitos, isto é, as relações que no máximo um termo pode ter com um determinado termo. Tais são as de pai, mãe, marido (exceto no Tibete), quadrado de, seno de, e assim por diante. Mas as de um-dos-país, raiz quadrada etc., não são de um-para-muitos. É formalmente possível substituir todas as relações pelas relações de um-para-muitos por meio de um dispositivo. Tomemos (digamos) a relação *menor* entre os números indutivos. Dado qualquer número n maior do que 1, não haverá somente um número que tenha com n a relação *menor*, pois nos é possível formar toda uma classe de números que são menores do que n . Trata-se de uma classe, e sua relação com n não é compartilhada por qualquer outra classe. Podemos chamar à classe dos números que são menores do que n a "ancestralidade própria" de n , no sentido em que

falamos de ancestralidade e posteridade em conexão com a indução matemática. Então, "ancestralidade própria" é uma relação de um-para-muitos (*um-para-muitos* será sempre usada como incluindo *um-para-um*), porquanto cada número determina uma única classe de números constituindo sua ancestralidade própria. Dessa forma, a relação *menor do que* pode ser substituída por *ser um membro da ancestralidade própria de*. Desse modo, uma relação de um-para-muitos na qual o um é uma classe, juntamente com os membros dessa classe, pode sempre substituir formalmente uma relação que não é de um-para-muitos. Peano, que por alguma razão concebe sempre instintivamente as relações como sendo de um-para-muitos, trata desse modo aquelas que naturalmente não o são. Contudo, a redução a relações de um-para-muitos por esse método, embora possível como questão de forma, não representa uma simplificação técnica, havendo todo motivo para se pensar que não representa uma análise filosófica, quando mais não seja pelo fato de as classes deverem ser consideradas "ficções lógicas". Continuaremos, portanto, considerando as relações de um-para-muitos como uma espécie especial de relações.

As relações de um-para-muitos estão presentes em todas as frases da forma "o fulano-de-tal assim e assim". "O Rei da Inglaterra", "a esposa de Sócrates", "o pai de John Stuart Mill" etc., são expressões que descrevem, todas, alguma pessoa, por meio de uma relação de um-para-muitos com um dado termo. Uma pessoa não pode ter mais de um pai, de modo que "o pai de John Stuart Mill" descreve alguma pessoa, mesmo que não saibamos quem. Há muito a dizer sobre as descrições, mas no momento é nas relações que estamos interessados, e as descrições só são relevantes para exemplificar os usos das relações de um-para-muitos. Cabe observar que todas as funções matemáticas resultam de relações de um-para-muitos: o logaritmo de x , o co-seno de x etc., são, como o pai de x , termos descritos por meio de uma relação de um-para-muitos (logaritmo, co-seno etc.) com um termo dado (x). A noção de *função* não precisa ser confinada aos números, ou aos usos aos quais os matemáticos nos acostumaram; pode ser estendida a todos os casos de relações de um-para-muitos, e "o pai de x " é tão legitimamente uma função da qual x é o argumento quanto o é "o logaritmo de x ". As funções são, nesse sentido, *funções descritivas*. Como veremos depois, há funções de gênero ainda mais geral e fundamental, isto é, as funções *proposicionais*; mas no momento devemos confinar a nossa atenção às funções des-

critivas, isto é, as da espécie "o termo que tem a relação R com x ", ou, para simplificar, "a R de x ", em que R é uma relação de um-para-muitos.

Cabe observar que para que "a R de x " descreva um termo preciso, x deve ser um termo com o qual algo tenha a relação R e não deve haver mais de um termo tendo a relação R com x , porquanto o artigo "o" ou "a", corretamente usado, deve implicar unicidade. Assim, podemos falar de "o pai de x " se x é qualquer ser humano exceto Adão e Eva; mas não podemos falar de "o pai de x " se x é uma mesa ou uma cadeira ou qualquer outra coisa que não possa ter um pai. Devemos dizer que a R de x "existe" quando há apenas um termo, e mais nenhum, que tenha a relação R com x . Assim, se R é uma relação de um-para-muitos, a R de x existe sempre que x pertença ao domínio inverso de R e não em caso contrário. Entendendo "a R de x " como uma função no sentido matemático, dizemos que x é o "argumento" da função, e, se y é o termo que tem a relação R com x , isto é, se y é a R de x , então y é o "valor" da função para o argumento x . Se R é uma relação de um-para-muitos, o âmbito dos argumentos possíveis para a função é o domínio inverso de R e o âmbito dos valores é o domínio. Assim, o âmbito dos argumentos possíveis para a função "o pai de x " compreende todos os que têm pai, isto é, o domínio inverso da relação *pai*, enquanto o âmbito de valores possíveis é formado por todos os pais, isto é, o domínio da relação.

Muitas das noções mais importantes da lógica das relações são funções descritas, como por exemplo: *inverso*, *domínio*, *domínio inverso*, *campo*. Outros exemplos surgirão com a continuação.

As relações de *um-para-um* constituem classe especialmente importante entre as relações de um-para-muitos. Já tivemos ocasião de falar das relações de um-para-um em conexão com a definição de número, mas é necessária a familiarização com elas e não apenas conhecer-se sua definição formal. Essa definição pode ser derivada a partir da definição das relações de um-para-muitos: elas podem ser definidas como relações de um-para-muitos, isto é, as relações que são tanto de um-para-muitos como de muitos-para-um. As relações de um-para-muitos podem ser definidas como relações tais que, se x tem a relação em questão com y , não há outro termo x' algum que também tenha essa relação com y . Ou podem ser ainda assim definidas: Dados dois termos x e x' , os termos com os quais x

tem a relação dada e aqueles com os quais x' tem essa relação não têm membro algum em comum. Ou, ainda, podem ser definidas como relações tais que o produto de uma delas e seu inverso implica identidade, onde o "produto relativo" de duas relações R e S é a relação que se estabelece entre x e z quando há um termo intermediário y tal que x tem a relação R com y e y a relação S com z . Assim, por exemplo, se R é a relação de pai para filho, o produto relativo de R e seu inverso será a relação que se estabelece entre x e um homem z quando há uma pessoa y tal que x é o pai de y e y é o filho de z . É óbvio que x e z devem ser a mesma pessoa. Se, por outro lado, tomamos a relação de um-dos-pais e filho, que não é de um-para-muitos, não mais podemos alegar que, se x é um-dos-pais de y e y é um filho de z , x e y devem ser a mesma pessoa, porque um pode ser o pai de y e o outro a mãe. Fica assim ilustrado ser isso uma característica das relações de um-para-muitos quando o produto relativo de uma relação e seu inverso implica identidade. No caso das relações de um-para-um isso acontece, e também o produto relativo do inverso pela relação implica identidade. Dada uma relação R , é conveniente, se x tem a relação R com y , pensar-se em y como sendo atingido por um "R-passo" ou um "R-vetor". No mesmo caso x será atingido por um "R-passo para trás". Podemos, assim, enunciar a característica das relações de um-para-muitos dizendo que um R-passo seguido de um R-passo para trás deve trazer-nos de volta ao nosso ponto de partida. O mesmo não se dá, de modo algum, no tocante a outras relações; por exemplo, se R é a relação do filho para um-dos-pais, o produto relativo de R e seu inverso é a relação "o próprio indivíduo ou irmão ou irmã", e, se R é a relação de neto ou neta para um-dos-avós, o produto relativo de R e seu inverso é "o próprio indivíduo ou irmão ou irmã ou primo (ou prima) em primeiro grau". Cabe observar que o produto relativo de duas relações não é em geral comutativo, isto é, o produto relativo de R e S não é em geral a mesma relação que o produto relativo de S e R . Por exemplo, o produto relativo de um-dos-pais e irmão é tio, mas o produto relativo de irmão e um-dos-pais é um-dos-pais.

A relação de um-para-um dá uma correlação de duas classes, termo a termo, de forma que cada termo de cada classe tem seu correlato na outra. Tais correlações são mais simples de se perceber quando as duas classes não têm membro algum em comum, como a classe dos maridos e a das esposas; pois nesse caso sabemos de uma vez se um termo deve ser considerado

aquele do qual a relação correlacionadora R vai ou como aquele para o qual ela vai. É conveniente usar a palavra *referente* para o termo do qual a relação vai, e o vocábulo *relatum* para o termo para o qual ela vai. Assim, se x e y são marido e mulher, então, com respeito à relação "marido", x é referente e y é *relatum*, mas, com respeito à relação "esposa", y é referente e x é *relatum*. Dizemos que uma relação e seu inverso têm "sentidos" opostos; assim, o "sentido" de uma relação que vai de x para y é o oposto do sentido da relação correspondente de y para x . O fato de uma relação ter um "sentido" é fundamental e é parte da razão para que a ordem possa ser gerada por relações apropriadas. Cabe observar que a classe de todos os referentes possíveis para uma relação dada é seu domínio, e a classe de todos os *relata* possíveis é seu domínio inverso.

Mas acontece freqüentemente que o domínio e o domínio inverso de uma relação de um-para-um se interceptam. Tome-mos, por exemplo, os dez primeiros números inteiros (excluindo 0), acrescentando 1 a cada um deles; assim, em vez dos dez primeiros inteiros temos agora os inteiros:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

São os mesmos que tínhamos antes, exceto que 1 foi eliminado no início e 11 foi acrescentado no fim. Ainda há dez inteiros: estão correlacionados com os dez anteriores pela relação de n para $n+1$, que é uma relação de um-para-um. Ou, em vez de adicionarmos 1 a cada um de nossos dez inteiros originais, poderíamos ter elevado cada um deles ao dobro, obtendo assim os inteiros:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Ainda temos aí cinco de nossos inteiros anteriores, isto é, 2, 4, 6, 8, 10. A relação correlacionadora é, neste caso, a relação de um número para o seu dobro, que também é uma relação de um-para-um. Ou podemos ainda ter substituído por seu quadrado, obtendo assim o conjunto:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Neste caso, somente três números de nosso conjunto original permaneceram, ou seja, 1, 4, 9. Tais processos de correlação podem ser variados indefinidamente.

O caso mais interessante da espécie acima é aquela no qual a nossa relação de um-para-um tem um domínio inverso que é parte, mas não o todo, do domínio. Se, em vez de confinarmos o domínio aos primeiros dez inteiros, tivéssemos considerado todos os números indutivos, as instâncias acima teriam ilustrado esse caso. Podemos dispor os números considerados em duas fileiras, colocando cada correlato debaixo do número do qual ele é correlato. Assim, quando o correlacionador é a relação de n para $n+1$, temos as duas fileiras:

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, \dots n \dots \\ 2, 3, 4, 5, 6, \dots n+1 \dots \end{array}$$

Quando o correlacionador é a relação de um número para o seu dobro, temos:

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, \dots n \dots \\ 2, 4, 6, 8, 10, \dots 2n \dots \end{array}$$

Quando o correlacionador é a relação de um número para o seu quadrado, temos:

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, \dots n \dots \\ 1, 4, 9, 16, 25, \dots n^2 \dots \end{array}$$

Em todos os casos, todos os números indutivos aparecem na fileira de cima e apenas alguns na de baixo.

Os casos desse gênero, nos quais o domínio inverso é uma "parte própria" do domínio (isto é, uma parte e não o todo), voltarão a ocupar-nos novamente quando tratarmos do infinito. No momento, queremos apenas observar que existem e exigem consideração.

Outra classe de correlações com freqüência importante é a chamada classe das "permutações", na qual o domínio e o domínio inverso são idênticos. Consideremos, por exemplo, os seis arranjos possíveis de três letras:

$$\begin{array}{l} a, b, c \\ a, c, b \\ b, c, a \\ b, a, c \\ c, a, b \\ c, b, a \end{array}$$

Cada um desses arranjos pode ser obtido de um dos outros por meio de uma correlação. Tomemos, por exemplo, o primeiro e o último (a, b, c) e (c, b, a) . Aqui, a é correlacionado com c , b consigo mesmo e c com a . É óbvio que a combinação de duas permutações é novamente uma permutação, isto é, as permutações de uma determinada classe formam o que é chamado um "grupo".

Essas várias espécies de correlações são importantes em vários pontos, algumas com um propósito, outras com outro. A noção geral de correlações de um-para-um tem importância ilimitada na Filosofia da Matemática, como já vimos em parte, mas veremos muito mais plenamente com a continuação. Um de seus usos nos ocupará no capítulo seguinte.

CAPÍTULO VI

Similaridade de relações

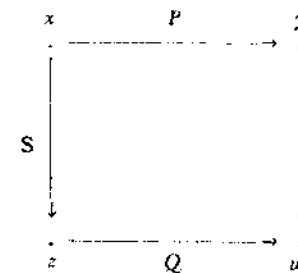
VIMOS NO CAPÍTULO II, que duas classes têm o mesmo número de termos quando são "similares", isto é, quando existe uma relação de um-para-um cujo domínio é uma das classes e cujo domínio inverso é a outra. Em tal caso dizemos que há uma "correlação de um-para-um" entre as duas classes.

No presente capítulo temos de definir uma relação entre relações, que desempenhará para estas papel idêntico ao que a similaridade de classes desempenha para as classes. Chamaremos a essa relação "similaridade de relações" ou "semelhança" quando parecer útil usar uma palavra diferente da que usamos para as classes. Como será definida a semelhança?

Ainda empregaremos a noção de correlação: admitiremos que o domínio de uma relação possa ser correlacionada com o domínio da outra, e o domínio inverso de uma com o da outra; mas isso não é suficiente para o gênero de semelhança que desejamos exista entre as nossas duas relações. O que nós queremos é que, sempre que uma das relações se estabeleça entre dois termos, a outra relação estabeleça-se-á entre os correlatos desses dois termos. O exemplo mais fácil do gênero de coisa que desejamos é um mapa. Quando um lugar está ao norte de outro, o ponto do mapa correspondente ao primeiro está acima do correspondente ao segundo: quando um lugar está a oeste de outro, o ponto do mapa corresponde a um que está à esquerda do que corresponde ao outro, e assim por diante. A estrutura do mapa corresponde à do país do qual ele é um mapa. As relações espaciais do mapa têm "semelhança" com as relações espaciais do país cartografado. É esse tipo de conexão entre relações que desejamos definir.

Podemos, em primeiro lugar, introduzir certa restrição, com proveito. Ao definirmos semelhança limitar-nos-emos às relações que têm "campos", isto é, àquelas que permitem a

formação de uma única classe no domínio e do domínio inverso. Isso nem sempre se dá. Vejamos, por exemplo, a relação "domínio", isto é, a relação que o domínio de uma relação tem com ela. Essa relação tem para seu domínio todas as classes, porquanto toda classe é o domínio de alguma relação; e tem toda relação para o seu domínio inverso, porque toda relação tem um domínio. Mas as classes e as relações não podem ser somadas para formar uma única classe nova por serem de "tipos" lógicos diferentes. Não necessitamos entrar na difícil doutrina dos tipos, mas é bom saber quando nos estamos abstendo de entrar nela. Podemos dizer, sem tocarmos as bases da asserção, que uma relação só tem um "campo" quando é "homogênea", isto é, quando seu domínio e domínio inverso são do mesmo tipo lógico. Como indicação sumária do que queremos dizer por "tipo", podemos afirmar que os indivíduos, as classes de indivíduos, as relações entre indivíduos, as relações entre classes, as relações de classes com indivíduos etc., são de tipos diferentes. Acontece que a noção de semelhança não é muito útil quando aplicada a relações que não são homogêneas; devemos, portanto, ao definir semelhança, simplificar o nosso problema referindo-nos ao "campo" de uma das relações em questão. Isso limita um pouco a generalidade de nossa definição, mas a limitação não tem qualquer importância prática. E, uma vez enunciada, não mais necessita ser lembrada. Podemos definir duas relações P e Q como "similares" ou como tendo "semelhança" quando existe uma relação de um-para-um S cujo domínio é o campo de P e cujo domínio inverso é o campo de Q ; e é uma relação que, se um termo tem a relação P com outro, o correlato de um deles tem a relação Q com o correlato do outro e vice-versa. A figura tornará isso mais claro. Sejam x e y dois termos que têm a relação P . Então, tem de haver dois termos z e w tais que x tenha a relação S com z , y tenha a relação S com w e z tenha a relação Q com w . Se isso acontece a todo par de termos tais



como x e y , e se o inverso acontece com todo par de termos tais como z e w , é claro que para toda instância em que se verifique a relação P haverá uma instância correspondente em que se verifique a relação Q e vice-versa; e é isso o que desejamos garantir com a nossa definição. Podemos eliminar algumas redundâncias no es-

boço de definição acima pela observação de que, quando as supracitadas condições são preenchidas, a relação P é o mesmo que o produto relativo de S e Q pelo inverso de S , isto é, P -passo de x para y pode ser substituído pela sucessão S -passo de x para z , Q -passo de z para w , S -passo para trás de w para y . Podemos, assim, estabelecer as seguintes definições:

Uma relação S é dita "correlacionadora" ou "correlacionadora ordinal" de duas relações P e Q se S é uma relação de um-para-um, tem o campo de Q para seu domínio inverso e é tal que P é o produto relativo de S e Q e o inverso de S .

Duas relações P e Q são ditas "similares" ou que têm a mesma "semelhança" quando há pelo menos uma correlacionadora de P e Q .

Constatar-se-á que essas definições acarretam aquilo que acima consideramos necessário.

E ver-se-á que, quando duas relações são similares, compartilham de todas as propriedades que não dependem dos termos reais que fazem parte de seus campos. Por exemplo, se uma implica diversidade, o mesmo se dá com a outra: se uma é transitiva, a outra também o é; se uma é conexa, assim também a outra. Portanto, se uma é serial, a outra também será serial. E também se uma é uma relação de um-para-muitos ou de um-para-um, a outra será, igualmente, uma relação de um-para-muitos ou de um-para-um, e assim por diante, abrangendo todas as propriedades gerais das relações. Até mesmo os enunciados que envolvem os termos reais do campo de uma relação, embora eles possam não ser verdadeiros como se apresentam quando aplicados a uma relação similar, serão sempre capazes de tradução para enunciados análogos. Somos levados por tais considerações a um problema que tem, na Filosofia Matemática, uma importância que não foi até agora adequadamente reconhecida. O nosso problema pode ser assim enunciado:

Dado algum enunciado em uma linguagem da qual conhecemos a gramática e a sintaxe, mas não o vocabulário, quais os significados possíveis de tal enunciado e quais os significados das palavras desconhecidas que o tornariam verdadeiro?

A razão da importância dessa pergunta está no fato de ela representar, muito mais aproximadamente do que se pode supor, o estado de nosso conhecimento da natureza. Sabemos que certas proposições científicas — as quais são, nas ciências mais avançadas, expressadas em símbolos matemáticos — são mais ou menos verdadeiras do mundo, mas estamos muito a esmo no que

tange à interpretação a ser atribuída aos termos que ocorrem nessas proposições. Sabemos muito mais (usando no momento duas palavras antiquadas) sobre a *forma* da natureza do que sobre a *matéria*. Consequentemente, o que realmente sabemos quando enunciamos uma lei da natureza é somente que há provavelmente *alguma* interpretação de nossos termos que tornará a nossa lei aproximadamente verdadeira. Assim, esta pergunta ganha grande importância: Quais os significados possíveis de uma lei expressada em termos dos quais não conhecemos o significado substantivo, mas apenas a gramática e a sintaxe? E essa pergunta é a sugerida acima.

Ignoraremos por enquanto a pergunta geral, a qual nos ocupará em etapa posterior; a questão da semelhança em si deve ser mais investigada primeiro.

Em razão do fato de, quando duas relações são similares, suas propriedades serem as mesmas exceto quando dependem de campos compostos apenas dos termos de que são compostos, torna-se desejável uma nomenclatura que reúna todas as relações que sejam similares a uma dada relação. Assim como chamamos ao conjunto das classes que são similares a uma classe dada o "número" daquela classe, podemos, de igual modo, chamar ao conjunto de todas as relações que são similares a uma relação dada o "número" daquela relação. Mas, a fim de evitar confusão com os números apropriados às classes, falaremos, neste caso, de "número-relação". Assim, temos as seguintes definições:

O "número-relação" de uma relação dada é a classe de todas as relações similares à relação dada.

Os "números-relação" são o conjunto de todas as classes de relações que são os números-relação de várias relações, ou, o que vem a ser o mesmo, um número-relação é uma classe de relações consistindo de todas as relações que são similares a um membro da classe.

Quando se fizer necessário se falar dos números de classes de um modo que torne impossível confundi-los com números-relação, chamá-los-emos "números cardinais". Assim, os números cardinais são os números apropriados às classes. Estão aí incluídos os inteiros comuns da vida cotidiana e também certos números infinitos, dos quais falaremos depois. Quando falamos de "números" sem especificação, deve ficar subentendido que nos referimos aos números *cardinais*. A definição de número cardinal é, cabe lembrar, a seguinte:

O “número cardinal” de uma dada classe é o conjunto de todas as classes que são similares à classe dada.

As séries são a aplicação mais óbvia dos números-relação. Duas séries podem ser consideradas igualmente longas quando têm o mesmo número-relação. Duas séries *finitas* terão o mesmo número-relação quando seus campos tiverem o mesmo número cardinal de termos, e só nesse caso — isto é, uma série de (digamos) 15 termos terá o mesmo número-relação que qualquer outra série de quinze termos, mas não terá o mesmo número-relação que uma série de 14 ou 16 termos, nem, naturalmente, o mesmo número-relação que uma relação que não seja serial. Assim, no caso assaz especial das séries finitas, há um paralelismo entre os números cardinais e os números-relação. Os números-relação aplicáveis às séries podem ser chamados “números seriais” (os que são comumente chamados “números ordinais” são uma subclasse destes); assim, um número serial finito é determinado quando conhecemos o número cardinal de termos do campo de uma série que tenha o número serial em questão. Se n é um número cardinal finito, o número-relação de uma série que tem n termos é chamado número “ordinal” n . (Há também números ordinais finitos, mas falaremos deles em capítulo posterior.) Quando o número cardinal de termos do campo de uma série é infinito, o número-relação da série não é determinado meramente pelo número cardinal, pois na verdade, existe um número infinito de números-relação para um número cardinal, como veremos quando considerarmos as séries infinitas. Quando uma série é infinita, o que podemos chamar seu “comprimento”, isto é, seu número-relação, pode variar sem alteração no número cardinal; mas quando uma série é finita isso não pode acontecer.

Podemos definir adição e multiplicação para os números-relação tanto quanto para os números cardinais, podendo ser desenvolvida toda uma aritmética dos números-relação. A maneira pela qual isso deve ser feito pode ser facilmente vista considerando-se o caso das séries. Suponhamos, por exemplo, que desejemos definir a soma de duas séries que não se interceptam de modo que o número-relação da soma seja capaz de ser definido como a soma dos números-relação das duas séries. Em primeiro lugar, é claro que há uma *ordem* entre as duas séries: uma delas deve ser colocada antes da outra. Assim, se P e Q são as relações geradoras das duas séries, na série que é a soma com P colocada antes de Q , todo membro do campo de P

precederá todo membro do campo de Q . Desse modo, a relação serial a ser definida como a soma de P e Q não é simplesmente “ P ou Q ”, mas “ P ou Q ou a relação de qualquer membro do campo de P com qualquer membro do campo de Q ”. Admitindo que P e Q não se interceptam, essa relação é serial, mas “ P ou Q ” não é serial, não sendo conexa, porquanto não se estabelece entre um membro do campo de P e um membro do campo de Q . Assim sendo, a soma de P e Q , conforme acima definida, é o que necessitamos para definir a soma de dois números-relação. Modificações similares são necessárias para os produtos e as potências. A aritmética resultante não obedece à lei comutativa: a soma ou o produto de dois números-relação dependem geralmente da ordem em que são efetuados. Mas obedece à lei associativa, que é uma forma da lei distributiva, e a duas das leis formais das potências, não apenas quando aplicadas aos números seriais, mas também aos números-relação em geral. A aritmética-relação é, na verdade, conquanto recente, um ramo absolutamente respeitável da Matemática.

Não se deve supor que, meramente pelo fato de as séries possibilitarem a mais óbvia aplicação da idéia de semelhança, não haja outras aplicações importantes. Já mencionamos os mapas e podemos estender nossos pensamentos desses exemplos à Geometria em geral. Se o sistema de relações pelo qual uma Geometria é aplicada a um certo conjunto de termos pode ser colocado inteiramente em relações de semelhança com um sistema que se aplique a outro conjunto de termos, então a Geometria dos dois conjuntos é indistinguível do ponto de vista matemático, isto é, todas as proposições são a mesma exceto pelo fato de serem aplicadas em um caso a um conjunto de termos, e, no outro, a outro conjunto de termos. Podemos exemplificar isto por meio das relações do gênero que pode ser chamado “entre”, que consideramos no capítulo IV. Vimos então que se uma relação de três termos tiver certas propriedades lógicas formais, dará surgimento a séries e poderá ser chamada uma “relação-entre”. Dados dois pontos quaisquer, podemos usar a relação-entre para definir a linha reta determinada por esses dois pontos; ela consiste de a e b , juntamente com todos os pontos xx , tais que a relação-entre se estabelece entre os três pontos a , b , x , em uma ordem qualquer. Foi mostrado por O. Veblen que podemos considerar todo o nosso espaço como o campo de uma relação-entre de três termos e definir a nossa Geometria

pelas propriedades que atribuímos à nossa relação-entre.* Agora, a semelhança é tão facilmente definível entre relações de três termos quanto entre relações de dois termos. Se B e B' são duas relação-entre, de modo que " $xB(y,z)$ " signifique " x está entre y e z com respeito a B ", chamaremos a S um correlacionador de B e B' se tiver o campo de B' , para seu domínio inverso, e for tal que a relação B se estabeleça entre três termos quando B' se estabeleça entre seus S -correlatos, e somente nessas condições. E diremos que B é semelhante a B' quando há pelo menos um correlacionador de B com B' . O leitor poderá facilmente convencer-se de que, se B é semelhante a B' nesse sentido, não poderá haver diferença alguma entre a Geometria gerada por B e a gerada por B' .

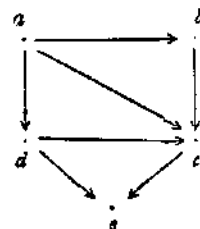
Segue-se daí que o matemático não necessita preocupar-se com a existência particular ou natureza intrínseca de seus pontos, linhas e planos, mesmo quando esteja especulando a Matemática aplicada. Podemos dizer que há evidência empírica da verdade aproximada daquelas partes da Geometria que não sejam objeto de definição. Mas não há evidência empírica alguma quanto ao que deva ser um "ponto". Tem de ser algo que satisfaça ao máximo os nossos axiomas, mas não tem de ser "muito pequeno" ou "destituído de partes". O fato de ele ser ou não essas coisas é indiferente, desde que satisfaça aos nossos axiomas. Se pudermos construir fora do domínio empírico uma estrutura lógica que, por mais complicada que seja, satisfaça aos nossos axiomas geométricos, essa estrutura poderá ser legitimamente chamada um "ponto". Não devemos dizer que nada mais existe que possa ser chamado um "ponto"; devemos apenas dizer: "Este objeto que construímos é suficiente para o geometra; poderá ser um dos muitos objetos, qualquer dos quais seria suficiente, mas isso não nos interessa, porquanto esse objeto é suficiente para vindicar a verdade empírica da Geometria, no quanto a Geometria não seja uma questão de definição". Isso é apenas uma ilustração do princípio geral de que o que importa em Matemática, e, em alto grau, nas Ciências Físicas, não é a natureza intrínseca de nossos termos, mas a natureza lógica de suas inter-relações.

* Isso não se aplica ao espaço elíptico, mas apenas aos espaços nos quais a linha reta é uma série aberta. *Modern Mathematics*, compilada por J. W. A. YOUNG, pp. 3-51 (monografia de O. VEBLEN sobre "Os Fundamentos da Geometria").

Podemos dizer, de duas relações similares, que elas têm a mesma "estrutura". Para fins matemáticos (embora não para os da Filosofia pura), a única coisa que importa no tocante à relação são os casos em que ela se estabeleça e não sua natureza intrínseca. Assim como as classes podem ser definidas por vários conceitos diferentes, mas co-extensivos — e.g., "homem" e "bípede implume" — assim também duas relações que são conceitualmente diferentes podem estabelecer-se no mesmo conjunto de instâncias. Uma "instância" em que se estabelece uma relação deve ser concebida como um par de termos, com uma ordem, de forma que um dos termos vem primeiro e o outro depois: o par deve, naturalmente, ser tal que seu primeiro termo tenha a relação em questão com o segundo. Tomemos (digamos) a relação "pai": podemos definir o que podemos chamar de "extensão" dessa relação como a classe de todos os pares ordenados (x, y) tais que x é o pai de y . Do ponto de vista matemático, a única coisa importante acerca da relação "pai" é que ela define esse conjunto de pares ordenados. De modo geral, dizemos:

A "extensão" de uma relação é a classe dos pares ordenados (x, y) tais que x tem a relação em questão com y .

Podemos agora dar um passo à frente no processo de abstração, considerando o que podemos querer dizer por "estrutura". Dada qualquer relação, podemos, se ela for suficientemente simples, construir um mapa seu. A bem da precisão, tomemos uma relação cuja extensão sejam os seguintes pares: $ab, ac, ad, bc, ce, dc, de$, onde a, b, c, d, e são cinco termos quaisquer. Podemos confeccionar um "mapa" dessa relação tomando cinco pontos sobre um plano e os ligando por setas, como na figura. O que é revelado pelo mapa é aquilo a que chamamos "estrutura" da relação.



Está claro que a "estrutura" da relação não depende dos termos particulares que formem o campo da relação. O campo pode ser modificado sem que se modifique a estrutura, e esta pode ser alterada sem que se altere o campo — por exemplo, se fôssemos acrescentar o par ae à ilustração acima, teríamos de alterar a estrutura, mas não o campo. Duas relações têm a mesma "estrutura", diremos, quando o mesmo mapa servir para ambas — ou, o que vem a ser a mesma coisa, quando

qualquer delas pode ser um mapa da outra (uma vez que toda relação pode ser o seu próprio mapa). E isso é, como mostrará um momento de reflexão, precisamente a mesma coisa a que chamamos "semelhança". Equivale a dizer, duas relações têm a mesma estrutura quando têm semelhança, isto é, quando têm o mesmo número-relação. Assim, aquilo que definimos como "número-relação" é exatamente a mesma coisa que está obscuramente insinuada pela palavra "estrutura" — uma palavra que, por mais importante que seja, jamais é (ao que saibamos) definida em termos precisos por aqueles que a usam.

Houve, na Filosofia tradicional, muita especulação que poderia ter sido evitada caso se tivesse percebido a importância da estrutura e a dificuldade de entendê-la. Por exemplo, diz-se com frequência que o espaço e o tempo são subjetivos, mas têm contrapartidas objetivas; ou que os fenômenos são subjetivos, mas causados pelas coisas em si, as quais devem ter diferenças *inter se* correspondentes às diferenças nos fenômenos aos quais dão surgimento. Quando essas hipóteses são feitas, supõe-se geralmente que possamos saber pouquíssimo sobre as contrapartidas objetivas. Na realidade, contudo, se as hipóteses, conforme enunciadas, fossem corretas, as contrapartidas objetivas formariam um mundo tendo a mesma estrutura que a do mundo fenomenal, permitindo-nos inferir dos fenômenos a verdade de todas as proposições que podem ser enunciadas em termos abstratos e que se sabe serem verdadeiras no tocante aos fenômenos. Se o mundo fenomenal tem três dimensões, o mesmo deverá suceder ao mundo por trás dos fenômenos; se o mundo fenomenal é euclidiano, também o deverá ser o outro, e assim por diante. Em suma, toda proposição que tenha uma significação comunicável deve ser verdadeira no tocante aos dois mundos ou a nenhum deles: a única diferença deverá estar justamente na essência da individualidade, que sempre foge às palavras e sufoca as descrições, mas que, precisamente por isso, é irrelevante para a ciência. Mas o único propósito que os filósofos têm em mira ao condenarem os fenômenos é persuadirem a si mesmos e aos outros de que o mundo real é muito diferente do mundo das aparências. Todos nós podemos simpatizar com o seu desejo de provar tal proposição tão desejável, mas não os podemos felicitar por qualquer êxito. É verdade que muitos deles não asserem contrapartidas objetivas aos fenômenos, e estes escapam ao argumento acima. Os que asserem contrapartidas são, via de regra, muito reticentes sobre o assunto, provavelmente por sentirem instintivamente que, se insistirem

no assunto, isso lhes trará um *rapprochement* entre o mundo real e o mundo fenomenal. Caso insistissem no assunto, dificilmente poderiam evitar as conclusões que vimos sugerindo. Em tais questões, assim como em muitas outras, a noção de estrutura ou número-de-relação é importante.

CAPÍTULO VII

Números racionais, reais e complexos

JÁ VIMOS COMO DEFINIR os números cardinais e também os números-relação, dos quais o que se chama comumente números ordinais são uma espécie particular. Constatar-se-á que cada uma dessas espécies de número poderá ser tanto infinita como finita. Mas nenhuma delas é capaz, como se apresenta, das extensões mais familiares da idéia de número, a saber, as extensões para números negativos, fracionários, irracionais e complexos. No presente capítulo, daremos ligeiramente as definições lógicas dessas várias extensões.

Um dos erros que retardaram a descoberta de definições corretas nessa região é a idéia comum de que cada extensão de número inclui os gêneros anteriores como casos especiais. Pensou-se, ao se tratar dos números positivos e negativos, que os inteiros positivos podiam ser identificados com os inteiros originais sem sinal. Pensou-se também que uma fração cujo denominador é 1 pudesse ser identificada com o número natural que é o seu numerador. E pensou-se que os números irracionais, tais como a raiz quadrada de 2, tivessem lugar entre as frações racionais, como maiores do que algumas delas e menores do que outras, de modo que os números racionais e os irracionais pudessem ser tomados juntos como uma classe, chamada "números reais". E quando a idéia de número foi mais estendida de forma a incluir os números "complexos", isto é, números envolvendo a raiz quadrada de -1 , pensou-se que os números reais pudessem ser considerados como aqueles entre os números complexos nos quais a parte imaginária (isto é, a parte que era um múltiplo da raiz quadrada de -1) fosse zero. Todas essas suposições eram errôneas, devendo ser rejeitadas, como veremos, para que possam ser dadas definições corretas.

Começemos com os *inteiros positivos e negativos*. Torna-se óbvio, após um momento de consideração, que $+1$ e -1 devem

ser, ambos, relações, devendo, de fato, ser o inverso um do outro. A definição óbvia e suficiente é a de que $+1$ é a relação de $n+1$ para n , e -1 é a relação de n para $n+1$. De modo geral, se m é qualquer número indutivo, $+m$ será a relação de $n+m$ para n (para qualquer n) e $-m$ será a relação de n para $n+m$. De acordo com essa definição, $+m$ será uma relação de um-para-um enquanto n for um número cardinal (finito ou infinito) e m for um número cardinal indutivo. Mas $+m$ não é, em circunstância alguma, capaz de ser identificado com m , que não é uma relação, mas uma classe de classes. Na verdade, $+m$ é tão distinto de m quanto o é de $-m$.

As *frações* são mais interessantes do que os inteiros positivos ou negativos. Necessitamos das frações para muitas finalidades, mas talvez mais obviamente para as medições. O meu amigo e colaborador Dr. A. N. Whitehead desenvolveu uma teoria das frações especialmente adaptada à sua aplicação às medições, a qual é apresentada em *Principia Mathematica*.^{*} Mas se tudo aquilo de que se necessita é definir os objetos que tenham as propriedades puramente matemáticas exigidas, esse propósito pode ser alcançado por um método mais simples, o qual adotaremos aqui. Definiremos a fração m/n como sendo aquela relação que se estabelece entre dois números indutivos x e y quando $xn = ym$. Essa definição nos permite provar que m/n é uma relação de um-para-um, desde que nem m nem n seja zero. E, naturalmente, n/m é a relação inversa de m/n .

Pela definição acima torna-se claro que a fração $m/1$ é a relação entre dois inteiros x e y que consiste no fato de que $x = my$. Essa relação, como a relação $+m$, não é de modo algum capaz de ser identificada com o número cardinal indutivo m , porque uma relação e uma classe de classes são objetos de espécies flagrantemente diferentes.^{**} Ver-se-á que $0/n$ é sempre a mesma relação, seja qual for o número indutivo n ; ela é, em suma, uma relação entre 0 e qualquer outro cardinal indutivo. Podemos chamá-la o zero dos números racionais; ela não é, naturalmente, idêntica ao número cardinal 0. Inversamente, a relação $m/0$ é sempre a mesma, seja qual for o número indu-

^{*} Vol. III. * 300 ss., especialmente 303.

^{**} Naturalmente, continuaremos, na prática, falando das frações como sendo (digamos) maiores ou menores do que 1, significando maior ou menor do que a razão $1/1$. Enquanto ficar entendido que a razão $1/1$ e o número cardinal 1 são diferentes, não é necessário ser pedante dando ênfase à diferença.

tivo m . Não há cardinal indutivo algum correspondente a $m/0$. Podemos chamá-la "o infinito dos racionais". É uma instância do gênero de infinito tradicional em Matemática, que é representado por " ∞ ". Trata-se de gênero inteiramente diferente do verdadeiro infinito cantoriano, que consideraremos no próximo capítulo. O infinito dos racionais não exige, para sua definição ou uso, quaisquer classes infinitas ou inteiros infinitos. Não é, na realidade, qualquer noção importante e nós a poderíamos desprezar inteiramente se houvesse algum objetivo em fazê-lo. O infinito cantoriano, por outro lado, é da maior e mais fundamental importância; seu entendimento abre o caminho para campos inteiramente novos da Matemática e Filosofia.

Observar-se-á que somente o zero e o infinito, entre as razões, não são relações de um-para-um. Zero é uma relação de um-para-muitos, e infinito é de muitos-para-um.

Não há dificuldade alguma em definir "maior" e "menor" entre as razões ou (frações). Dadas duas razões m/n e p/q , diremos que m/n é menor do que p/q se mq é menor do que pn . Também não há dificuldade alguma em provar que a relação "menor do que", assim definida, é serial, de modo que as razões formam uma série em ordem de grandeza. Nessa série, zero é o menor termo e infinito é o maior. Se omitirmos zero e infinito dessa série, não mais haverá qualquer menor razão e maior razão; é óbvio que se m/n for qualquer razão outra que não zero ou infinito, $m/2n$ será menor e $2m/n$ será maior, embora nenhuma seja zero ou infinito, de forma que m/n não será nem a menor nem a maior razão, e portanto (quando zero e infinito são omitidos) não haverá nenhum menor de todos ou maior de todos, porquanto m/n foi escolhida arbitrariamente. Do mesmo modo, podemos provar que por mais aproximadamente iguais que duas frações possam ser, haverá sempre outras frações entre elas. Consideremos as duas frações m/n e p/q , das quais p/q é a maior. Então, é fácil ver (ou provar) que $(m+p)/(n+q)$ será maior do que m/n e menor do que p/q . Assim, a série das razões é uma série na qual não há dois termos consecutivos, havendo sempre outros termos entre quaisquer dois. Como há outros termos entre esses outros e assim por diante *ad infinitum*, é óbvio que há um número infinito de razões entre duas quaisquer, por mais aproximadamente iguais que sejam essas duas.*

* Estritamente falando, esse enunciado, assim como os que se seguem até ao fim do parágrafo, envolve o que é chamado "axioma do infinito", que será discutido em capítulo posterior.

Uma série que tenha a propriedade de haver sempre outros termos entre dois quaisquer, de modo que não haja dois consecutivos, é chamada "compacta". Assim, as razões em ordem de grandeza formam uma série "compacta". Tais séries têm propriedades importantes, sendo interessante observar que as razões oferecem uma instância de uma série compacta gerada de modo puramente lógico, sem qualquer apelo ao espaço ou tempo ou qualquer outro dado empírico.

As razões positivas e negativas podem ser definidas de modo análogo àquele pelo qual definimos os inteiros positivos e negativos. Tendo primeiro definido a soma de duas razões m/n e p/q como sendo igual a $(mq+pn)/nq$, definimos $+p/q$ como a relação de $m/n+p/q$ para m/n , onde m/n é uma razão qualquer; e $-p/q$ é, naturalmente, o inverso de $+p/q$. Essa não é a única maneira possível de definir as razões positivas e negativas, mas a que, para a finalidade que temos em mira, tem o mérito de ser uma adaptação óbvia da maneira por nós adotada no caso dos inteiros.

Passamos agora a uma extensão mais interessante da idéia de número, isto é, a extensão do que é chamado números "reais", os quais são a espécie que abrange os irracionais. No capítulo I, tivemos ocasião de mencionar os "incomensuráveis" e sua descoberta por Pitágoras. Foi através deles, isto é, da Geometria, que se pensou pela primeira vez nos números irracionais. Um quadrado cujo lado tenha 1 centímetro de comprimento, terá uma diagonal cujo comprimento será a raiz quadrada de 2 centímetros. Mas, como descobriram os antigos, não há fração alguma cujo quadrado seja 2. Essa proposição é provada no décimo livro de Euclides, que é um daqueles livros que os colegiais pensaram ter sido felizmente perdidos nos dias em que Euclides ainda era usado como livro didático. A prova é extraordinariamente simples. Se possível, admitamos que m/n seja a raiz quadrada de 2, de modo que $m^2/n^2=2$, isto é, $m^2=2n^2$. Assim, m^2 é um número par, e, portanto, m deverá ser par, porque o quadrado de um número ímpar é ímpar. Mas se m é par, m^2 deve ser divisível por 4, porque se $m=2p$, então $m^2=4p^2$. Assim, devemos ter $4p^2=2n^2$, onde p é a metade de m . Portanto, $2p^2=n^2$ e, por conseguinte, n/p será também a raiz quadrada de 2. Mas, então, podemos repetir o argumento: se $n=2q$, p/q também será a raiz quadrada de 2, e assim por diante, através de uma série infinita de números que são, cada um deles, a metade de seu predecessor. Mas isso é impossível;

se dividirmos um número por 2 e depois dividirmos a metade ao meio e assim por diante, deveremos atingir um número ímpar após um número finito de passos. Ou podemos apresentar o argumento com maior simplicidade admitindo que a fração m/n com que começamos já se encontre em seus termos mais simples; nesse caso, m e n não podem ser ambos pares; no entanto, vimos que se $m^2/n^2=2$, ambos o devem ser. Assim sendo, não pode haver fração m/n alguma cujo quadrado seja 2.

Portanto, nenhuma fração expressará exatamente o comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado tenha um centímetro de comprimento. Isso parece um desafio lançado à Aritmética pela natureza. Por mais que o aritmético se jacte (como o fez Pitágoras) de seus conhecimentos sobre a potência dos números, a natureza parece silenciá-lo com a exibição de comprimentos que nenhum número pode indicar em termos de unidade. Mas o problema não permaneceu nessa forma geométrica. Assim que a Álgebra foi inventada, o mesmo problema surgiu no tocante à solução de equações, embora tenha, então, assumido mais ampla forma, pois também passou a envolver números complexos.

É claro que podem ser encontradas frações que se aproximem cada vez mais de ter o seu quadrado igual a 2. Podemos formar uma série ascendente de frações tendo todas seus quadrados menores do que 2, mas diferindo de 2 em seus membros posteriores por menos do que qualquer quantidade predeterminada. Equivale a dizer, supondo-se que eu escolha qualquer quantidade de antemão, digamos, um bilionésimo, constatar-se-á que todos os termos de nossa série, após um determinado termo, digamos, o décimo, terão quadrados que diferirão de 2 por menos do que essa quantidade. E se eu tivesse escolhido uma quantidade ainda menor, poderia ter sido necessário avançar mais na série, porém mais cedo ou mais tarde chegaríamos a um de seus termos, digamos, o vigésimo, após o qual todos os termos teriam quadrados diferindo de 2 por menos do que essa quantidade ainda menor. Se nos dedicarmos a extrair a raiz quadrada de 2 pela regra usual da Aritmética, obteremos uma decimal interminável que, levada até um determinado número de casas decimais, preenche exatamente as condições acima. Podemos igualmente formar uma série descendente de frações cujos quadrados sejam todos maiores do que 2, porém maiores por quantidades continuamente menores ao nos aproximarmos de termos mais avançados da série, e diferindo, mais cedo ou

mais tarde, por menos do que qualquer quantidade especificada. Parece estar, dessa maneira, apertando um cerco em torno da raiz quadrada de 2, e poderá parecer difícil crer que ela nos escape permanentemente. Não obstante, não é por esse método que deveremos chegar realmente à raiz quadrada de 2.

Se dividirmos *todas* as razões em duas classes, segundo o critério de serem os seus quadrados menores do que 2 ou não, constataremos que, entre aquelas cujos quadrados *não* são menores do que 2, todas têm seus quadrados maiores do que 2. Não há um máximo para as razões cujos quadrados sejam menores do que 2 nem um mínimo para aquelas cujos quadrados sejam maiores do que 2. Não há limite inferior algum, à exceção de 0, para a diferença entre os números cujos quadrados são um pouco menores do que 2 e aqueles cujos quadrados são um pouco maiores do que 2. Podemos, em suma, dividir *todas* as razões em duas classes tais que todos os termos de uma delas sejam menores do que todos os da outra, não haja um máximo para uma delas e não haja um mínimo para a outra. Entre essas duas classes, onde se deve situar $\sqrt{2}$, nada existe. Assim, o nosso cerco, embora o tenhamos apertado ao máximo possível, foi apertado em torno do lugar errado e não captou $\sqrt{2}$.

O método acima, de dividir todos os termos de uma série em duas classes, onde uma precede totalmente a outra, foi levado às últimas consequências por Dedekind,* sendo, portanto, chamado "corte de Dedekind". Com respeito ao que acontece no ponto de secção, há quatro possibilidades: 1) pode haver um máximo para a secção inferior e um mínimo para a secção superior, 2) pode haver um máximo para uma e nenhum mínimo para a outra, 3) pode não haver máximo algum para uma, mas haver um mínimo para a outra, 4) pode não haver nem um máximo para uma nem um mínimo para a outra. Dessas quatro casos, o primeiro é ilustrado por qualquer série onde haja termos consecutivos: na série dos inteiros, por exemplo, uma secção inferior deverá terminar com algum número n e a secção superior deverá começar com $n+1$. O segundo caso será ilustrado pela série das razões se tomarmos para nossa secção inferior todas as razões até 1, inclusive, e para nossa secção superior todas as razões maiores do que 1. O terceiro caso é ilustrado se tomarmos para nossa secção inferior todas as razões inferiores

* *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 2.^a ed., Brunswick, 1892.

a 1 e para nossa secção superior todas as razões de 1 para cima (incluindo 1). O quarto caso, como vimos, é ilustrado se colocarmos em nossa secção inferior todas as razões cujos quadrados sejam menores do que 2 e em nossa secção superior todas as razões cujos quadrados sejam maiores do que 2.

Podemos desprezar o primeiro de nossos quatro casos, porquanto ele surge apenas nas séries em que há termos consecutivos. No segundo de nossos quatro casos, dizemos que o máximo da secção inferior é o *limite inferior* da secção superior, ou de qualquer conjunto de termos tomados fora da secção superior de tal forma que nenhum termo da secção superior esteja antes de todos eles. No terceiro de nossos quatro casos, dizemos que o mínimo da secção superior é o limite superior da secção inferior, ou de qualquer conjunto de termos tomados fora da secção inferior de tal maneira que nenhum termo da secção inferior esteja depois de todos eles. No quarto caso, dizemos que há uma "lacuna": nem a secção superior nem a inferior tem um limite ou um último termo. Neste caso, podemos também dizer que temos uma "secção irracional", porquanto as secções das séries das razões têm "lacunas" quando correspondem a irracionais.

O que retardou a verdadeira teoria dos irracionais foi uma crença errônea de que devia haver "limites" para as séries de razões. A noção de "limite" é da mais alta importância e será bem defini-lo antes de prosseguirmos.

Diz-se que um termo x é um "limite superior" de uma classe α com respeito a uma relação P se 1) α não tem máximo algum em P , 2) todo membro de α que pertence ao campo de P precede x , 3) todo membro do campo P que precede x precede algum membro de α . (Por "precede" queremos dizer "tem a relação P com".)

Isso pressupõe a seguinte definição de "máximo":

Diz-se que um termo x é um "máximo" de uma classe α com respeito à relação P se x é um membro de α e do campo de P e não tem a relação P com qualquer outro membro de α .

Essas definições não exigem que os termos aos quais se aplicam sejam quantitativos. Por exemplo, dada uma série de momentos de tempo arranjada segundo o critério de mais cedo e mais tarde, seu "máximo" (se é que existe) será o último dos momentos; mas se forem arranjados segundo o crité-

rio de mais tarde e mais cedo, seu "máximo" (se é que existe) será o primeiro dos momentos.

O "mínimo" de uma classe com respeito a P é o seu máximo com respeito ao inverso de P ; e o "limite inferior" com respeito a P é o limite superior com respeito ao inverso de P .

As noções de limite e de máximo não exigem essencialmente que a relação com respeito à qual são definidas seja serial, mas têm poucas aplicações importantes exceto nos casos em que a relação seja serial ou quase-serial. Uma noção que é freqüentemente importante é a de "limite superior ou máximo", ao qual podemos dar o nome de "fronteira superior". Assim, a "fronteira superior" de um conjunto de termos tomados fora de uma série é o seu último membro, se o conjunto tiver um último membro, e, caso contrário, é o primeiro termo depois de todos eles, se houver tal termo. Se não houver nem um máximo nem um limite, não haverá fronteira superior. A "fronteira inferior" é o limite inferior ou mínimo.

Voltando às quatro espécies de secção de Dedekind, vemos que, no caso das três primeiras espécies, cada secção tem uma fronteira (superior ou inferior, conforme o caso), enquanto na quarta espécie nenhuma secção tem uma fronteira. É também claro que sempre que a secção inferior tenha uma fronteira superior, a secção superior terá uma fronteira inferior. No segundo e terceiro casos, as duas fronteiras são idênticas; no primeiro, são termos consecutivos da série.

Uma série é chamada "dedekindiana" quando toda secção tem uma fronteira, superior ou inferior, conforme o caso.

Vimos que a série das razões na ordem de grandeza não é dedekindiana.

Por causa do hábito de serem influenciadas pela imaginação espacial, as pessoas supuseram que as séries *deviam* ter limites nos casos em que parecia estranho não os terem. Assim, percebendo não haver limite *racional* algum para as razões cujos quadrados são menores do que 2, elas se permitiram "postular" um limite *irracional*, que se destinava a preencher a lacuna de Dedekind. No trabalho acima mencionado, Dedekind estabeleceu o axioma de que a lacuna devia ser sempre preenchida, isto é, que toda secção devia ter uma fronteira. É por esse motivo que as séries em que se verificam seu axioma são chamadas "dedekindianas". Mas há um número infinito de séries para as quais o axioma não se verifica.

O método de “postular” o que queremos oferece muitas vantagens; são as mesmas vantagens do roubo sobre o trabalho honesto. Deixemo-las aos outros e prossigamos em nossa faina honesta.

É claro que um corte de Dedekind irracional “representa” de algum modo um irracional. A fim de nos utilizarmos disso, que, para começar, não é mais do que uma vaga impressão, devemos encontrar algum meio de extrair daí uma definição precisa; e, para fazê-lo, devemos livrar a nossa mente da noção de que um irracional deve ser o limite de um conjunto de razões. Assim como as razões cujo denominador é 1 não são idênticas a inteiros, assim também os números racionais que podem ser maiores ou menores do que irracionais, ou podem ter irracionais como limites, não devem ser identificados com as razões. Temos de definir uma nova espécie de números chamados “números reais”, dos quais alguns serão racionais e alguns irracionais. Os que são racionais “correspondem” a razões, do mesmo modo pelo qual a razão $n/1$ corresponde ao inteiro n ; mas não são a mesma coisa que as razões. A fim de decidir o que deverão ser, observemos que um irracional é representado por um corte irracional, e um corte é representado por sua secção inferior. Limitemo-nos a cortes nos quais a secção inferior não tem máximo algum; neste caso chamaremos à secção inferior um “segmento”. Então, os segmentos que correspondem a razões são os que consistem de todas as razões menores do que aquela à qual correspondem, e que constitui a sua fronteira, enquanto os que representam irracionais são os que não têm fronteira alguma. Os segmentos, tanto os que têm como os que não têm fronteiras, são tais que, de quaisquer dois pertencentes a uma série, um deve ser parte do outro; portanto, eles podem ser todos arranjados em uma série pela relação de todo e parte. Uma série na qual há lacunas dedekindianas, isto é, na qual há segmentos que não tem fronteira alguma, dará surgimento a mais segmentos do que tem termos, porquanto cada termo definirá um segmento tendo esse termo como fronteira, e então os segmentos sem fronteiras serão extras.

Estamos agora em situação de poder definir número real e número irracional.

Um “número real” é um segmento da série de razões em ordem de grandeza.

Um “número irracional” é um segmento da série de razões que não tem fronteira alguma.

Um “número real racional” é um segmento da série de razões que tem uma fronteira.

Assim, um número real racional consiste de todas as razões menores do que certa razão, e é o número real racional correspondente àquela razão. O número real 1, por exemplo, é a classe das frações próprias.

Nos casos em que naturalmente supusemos que um número irracional devesse ser o limite de um conjunto de razões, a verdade é que ele é o limite do conjunto de números reais racionais correspondentes na série de segmentos ordenados pela relação de todo e parte. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é o limite superior de todos os segmentos da série de razões que correspondem a razões cujos quadrados são menores do que 2. Mais simplesmente ainda, $\sqrt{2}$ é o segmento *consistindo* de todas as razões cujos quadrados são menores do que 2.

É fácil provar que a série de segmentos de qualquer série é dedekindiana. Porque, dado qualquer conjunto de segmentos, sua fronteira será sua soma lógica, isto é, a classe de todos os termos que pertencem a pelo menos um segmento do conjunto.*

A definição de números reais acima é um exemplo de “construção” em contraste com “postulação”, de que tivemos outro exemplo na definição de números cardinais. A grande vantagem desse método está em não exigir nenhuma suposição nova, permitindo-nos proceder dedutivamente a partir do aparato original da Lógica.

Não há dificuldade alguma em definir adição e multiplicação para os números reais conforme acima definimos. Dados dois números reais μ e ν , cada um sendo uma classe de razões, tomemos qualquer membro de μ e qualquer membro de ν , somando-os segundo a regra para a adição de razões. Fornecemos a classe de todas as somas obtíveis pela variação dos membros selecionados de μ e ν . Isso dá uma nova classe de razões, sendo fácil provar que essa nova classe é um segmento da série de razões. Definimo-la como a soma de μ e ν . Podemos enunciar a definição mais sinteticamente como se segue:

* Para um tratamento mais completo da questão dos segmentos e das relações dedekindianas, ver *Principia Mathematica*, vol. II. * 210-214. Para um tratamento mais completo dos números reais, ver *ibid.*, vol. III. * 310 ss., e *Principles of Mathematics*, caps. XXXIII e XXXIV.

A soma aritmética de dois números reais é a classe das somas aritméticas de um membro de um e um membro de outro, escolhidos de todas as maneiras possíveis.

Podemos definir o produto aritmético de dois números reais exatamente da mesma maneira, multiplicando um membro de um por um membro de outro, de todas as maneiras possíveis. A classe de razões assim gerada é definida como o produto dos dois números reais. (Em todas essas definições, a série das razões deve ser definida como excluindo zero e infinito.)

Não há dificuldade alguma em estender nossas definições aos números reais positivos e negativos e à sua adição e multiplicação.

Resta dar a definição de números complexos.

Os números complexos, embora capazes de uma interpretação geométrica, não são exigidos pela Geometria da mesma forma imperativa que os irracionais. Um número "complexo" significa um número envolvendo a raiz quadrada de um número negativo, seja ele inteiro, fracionário ou real. Como o quadrado de um número negativo é positivo, um número cujo quadrado deva ser negativo tem de ser um novo gênero de número. Usando a letra i , como a raiz quadrada de -1 , qualquer número envolvendo a raiz quadrada de um número negativo pode ser expressado sob a forma $x+yi$, onde x e y são reais. A parte yi é chamada parte "imaginária" desse número, sendo x a parte "real". (A razão para a expressão "números reais" está em serem contrastados com os que são "imaginários".) Os números complexos foram por muito tempo usados habitualmente pelos matemáticos, a despeito da ausência de qualquer definição precisa. Admitia-se simplesmente que eles obedecessem às regras aritméticas usuais, e o seu emprego, com base nessa suposição, foi vantajoso. São menos necessários à Geometria do que à Álgebra e à análise. Desejamos, por exemplo, poder dizer que toda equação biquadrada tem duas raízes e que toda equação cúbica tem três, e assim por diante. Mas se nos limitamos aos números reais, uma equação como $x^2+1=0$ não tem raízes, e uma equação como $x^3-1=0$ tem apenas uma. Toda generalização de número apresentou-se primeiro como necessária a algum problema simples: os números negativos foram necessários para que a subtração fosse sempre possível, porquanto, de outro modo, $a-b$ não teria sentido algum se a fosse menor do que b ; as frações se tornaram necessárias para que a divisão fosse sempre possível; e os números complexos são

necessários para que a extração de raízes e a solução de equações possam ser sempre exequíveis. Mas as extensões de número não são criadas pela mera necessidade que se tenha delas: são criadas pela definição, e é para a definição dos números complexos que devemos voltar agora a nossa atenção.

Um número complexo pode ser considerado e definido como simplesmente um par de números reais. Aqui, como em outros pontos, são possíveis muitas definições. Só se faz necessário que a definição adotada conduza a certas propriedades. No caso dos números complexos, se eles são definidos como pares ordenados de números reais, garantimos logo de uma vez algumas das propriedades exigidas, a saber, as de que dois números reais são necessários para determinar um número complexo, de que entre estes podemos distinguir um primeiro e um segundo, e de que dois números complexos só são idênticos quando o primeiro número real participe de um deles é igual ao primeiro participe do segundo, e o segundo igual ao segundo. O que ainda é desejado pode ser garantido pela definição das regras de adição e multiplicação. Devemos ter:

$$\begin{aligned}(x+yi)+(x'+y'i) &= (x+x')+(y+y')i \\ (x+yi)(x'+y'i) &= (xx'-yy')+(xy'+x'y)i.\end{aligned}$$

Assim, definiremos que, dados dois pares ordenados de números reais, (x, y) e (x', y') , sua soma será o par $(x+x', y+y')$ e seu produto será o par $(xx'-yy', xy'+x'y)$. Com essas definições garantiremos para os nossos pares ordenados as propriedades que desejamos. Por exemplo, tomemos o produto de dois pares $(0, y)$ e $(0, y')$. Esse produto será, segundo a regra acima, o par $(-yy', 0)$. Assim, o quadrado do par $(0, 1)$ será o par $(-1, 0)$. Mas os pares nos quais o segundo termo é 0 são os que, de acordo com a nomenclatura usual, têm sua parte imaginária igual a zero; na notação $x+yi$, eles são $x+0i$, que é natural escrever-se simplesmente x . Assim como é natural (mas errôneo) identificar com inteiros as razões cujo denominador é a unidade, assim também é natural (mas errôneo) identificar com números reais os números complexos cuja parte imaginária é zero. Embora isso seja um erro teórico, é uma conveniência prática; " $x+0i$ " pode ser substituído simplesmente por " x " e " $0+yi$ " por " yi ", desde que não nos esqueçamos de que " x " não é realmente um número real, mas um caso especial de um número complexo. E, quando y é 1, " yi " pode, naturalmente, ser substituído por " i ". Assim, o par $(0, 1)$ é

representado por i e o par $(-1, 0)$ é representado por -1 . Acontece que nossas regras de multiplicação fazem o quadrado de $(0, 1)$ igual a $(-1, 0)$, isto é, o quadrado de i é -1 . Era isso o que desejávamos garantir. Assim, as nossas definições servem a todos os propósitos necessários.

É fácil dar-se uma interpretação geométrica dos números complexos na Geometria plana. Esse assunto foi agradavelmente exposto por W. K. Clifford em seu *Common Sense of the Exact Sciences*, um livro de grande mérito, porém escrito antes de a importância das definições puramente lógicas ser percebida.

Os números complexos de ordem superior, embora muito menos úteis e importantes do que os que definimos, têm certos usos, que não são destituídos de importância, em Geometria, como pode ser visto, por exemplo, na *Universal Algebra* do Dr. Whitehead. A definição de números complexos de ordem n é obtida por uma extensão óbvia da definição que demos. Definimos um número complexo de ordem n como uma relação de um-para-muitos cujo domínio consiste de certos números reais e cujo domínio inverso consiste dos inteiros de 1 a n .^{*} Isso é o que seria ordinariamente indicado pela notação $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, onde os sufixos denotam correlação com os inteiros usados como sufixos e a correlação é de um-para-muitos, não necessariamente de um-para-um, porque x_r e x_s podem ser iguais quando r e s não sejam iguais. A definição acima, com uma regra apropriada de multiplicação, servirá a todos os propósitos para os quais os números complexos de ordem superior são necessários.

Completamos agora a nossa apreciação das extensões de números que não envolvem o infinito. A aplicação de número a coleções infinitas será o nosso próximo assunto.

CAPÍTULO VIII

Números cardinais infinitos

A DEFINIÇÃO DE NÚMEROS CARDINAIS que demos no capítulo II foi aplicada, no capítulo III, aos números finitos, isto é, aos números naturais comuns. A estes, demos o nome de "números indutivos", porque constatamos que devem ser definidos como números que obedecem à indução matemática partindo de 0. Mas ainda não consideramos coleções que não têm um número indutivo de termos, nem tampouco indagamos se se pode dizer que tais coleções têm um número. Trata-se de problema antiqüíssimo que foi resolvido em nossos próprios dias, principalmente por Georg Cantor. No presente capítulo, tentaremos explicar a teoria dos números cardinais transfinitos ou infinitos conforme ela resulta de uma combinação de suas descobertas com as de Frege sobre a teoria lógica dos números.

Não se pode considerar *certa* a existência, de fato, de quaisquer coleções infinitas no mundo. A suposição de que existam é o que chamamos "axioma do infinito". Embora se imponham vários modos que nos permitem esperar poder provar esse axioma, há razão para temer que sejam todos falazes e que não haja motivo lógico conclusivo algum para acreditarmos seja ele verdadeiro. Ao mesmo tempo, não há, certamente, razão lógica alguma *contra* as coleções infinitas, estando nós, portanto, justificados, em Lógica, ao investigarmos a hipótese de que tais coleções existem. A forma prática dessa hipótese é, para os nossos propósitos no momento, a suposição de que, se n é um número indutivo qualquer, n não é igual a $n+1$. Várias sutilezas surgem ao se identificar esta forma de nossa suposição com a forma que assevera a existência de coleções infinitas; mas deixaremos tais sutilezas de lado até que, em capítulo posterior, consideremos o axioma do infinito em si. No momento, admitiremos meramente que, se n é um número indutivo, n não é

^{*} Cf. *Principles of Mathematics*, parág. 360, p. 379.

igual a $n+1$. Isso está contido na suposição de Peano de que não há dois números indutivos com um mesmo sucessor; pois, se $n=n+1$, então $n-1$ e n têm o mesmo sucessor, a saber, n . Assim, não estamos admitindo coisa alguma que não estivesse contida nas proposições primitivas de Peano.

Consideremos agora a coleção dos próprios números indutivos. Trata-se de classe perfeitamente bem definida. Em primeiro lugar, um número cardinal é um conjunto de classes que são, todas, similares entre si e não são similares a qualquer outra coisa que não a elas próprias. Definimos, então, como "números indutivos" àqueles entre os cardinais que pertencem à posteridade de 0 com respeito à relação de n com $n+1$, isto é, àqueles que possuem todas as propriedades possuídas por 0 e pelos sucessores dos que as possuem, significando "sucessor" de n o número $n+1$. Assim a classe dos "números indutivos" está perfeitamente definida. De acordo com a nossa definição geral de números cardinais, o número de termos da classe dos números indutivos deve ser definido como "todas as classes que são similares à classe dos números indutivos" — isto é, este conjunto de classes é o número dos números indutivos, de acordo com as nossas definições.

Mas é fácil ver que esse número não é um dos números indutivos. Se n for um número indutivo qualquer, o número de números de 0 a n (ambos incluídos) será $n+1$; portanto, o número total de números indutivos é maior do que n pouco importando quais números indutivos n possa ser. Se arranjarmos os números indutivos em uma série em ordem de grandeza, essa série não terá um último termo; mas se n for um número indutivo, toda série cujo campo tiver n termos terá um último termo, como é fácil de provar. Tais diferenças podem ser multiplicadas *ad lib.* Assim, o número de números indutivos é um novo número, diferente de todos eles, não possuindo todas as propriedades indutivas. Pode acontecer que 0 tenha uma determinada propriedade e que se n a tiver também a tenha $n+1$, e que, no entanto, esse novo número não a tenha. As dificuldades que por tanto tempo retardaram a teoria dos números infinitos foram em grande parte motivadas pelo fato de pelo menos algumas das propriedades indutivas terem sido erroneamente consideradas como *devendo* permanecer a todos os números, na verdade, pensou-se que não podiam ser negadas sem contradição. O primeiro passo para se entender os números infinitos consiste em se perceber o engano desse ponto de vista.

A mais notável e desconcertante diferença entre um número indutivo e esse novo número é que este novo número não se altera ao lhe ser adicionado 1 ou subtraído 1, ou ao ser elevado ao dobro ou reduzido à metade ou ao ser submetido a qualquer de várias operações que consideramos tornar necessariamente um número maior ou menor. O fato de não ser alterado pela adição de 1 foi usado por Cantor para a definição do que ele chama números cardinais "transfinitos"; mas, por várias razões, algumas das quais aparecerão com a continuação, é melhor definir um número cardinal infinito como um número que não possui todas as propriedades indutivas, isto é, simplesmente como um número que não é um número indutivo. Não obstante, a propriedade de não ser alterado pela adição de 1 é muito importante e devemos demorar-nos nela por algum tempo.

Dizer que uma classe tem um número que não se altera pela adição de 1 é o mesmo que dizer que, se tomarmos um termo x que não pertença à classe, poderemos encontrar uma relação de *um-para-um* cujo domínio é a classe e cujo domínio inverso é obtido pela adição de x à classe. Porque, nesse caso, a classe é similar à adição dela própria com o termo x , isto é, a uma classe com um termo extra; de modo que ela tem o mesmo número que uma classe com um termo extra, e, se n for esse número, teremos $n=n+1$. Neste caso, também deveremos ter $n=n-1$, isto é, haverá relações de *um-para-um* cujos domínios consistem de toda a classe e cujo domínio inverso consiste de toda a classe menos um termo. Pode-se mostrar que os casos em que isso acontece são os mesmos que os casos aparentemente mais gerais nos quais *alguma* parte (menor do que o todo) pode ser colocada em relação de *um-para-um* com o todo. Quando isso pode ser feito, pode-se dizer que o correlacionador pelo qual é feito "reflete" toda uma classe em uma parte de si mesma; por essa razão tais classes serão chamadas "reflexivas". Assim:

Uma classe "reflexiva" é aquela que é similar a uma parte própria de si mesma. (Uma "parte própria" é uma parte menor do que o todo.) Um número cardinal "reflexivo" é o número cardinal de uma classe reflexiva.

Temos de considerar agora a propriedade de reflexiva.

Uma das instâncias mais impressionantes de uma "reflexão" é a ilustração de Royce do mapa: ele imagina ter ficado decidida a confecção de um mapa da Inglaterra sobre uma parte da superfície da Inglaterra. Um mapa, caso seja preciso, tem

uma correspondência de um-para-um perfeita com o original; assim, o mapa a que nos referimos, que é uma parte, tem uma relação de um-para-um com o todo e deve conter o mesmo número de pontos que o todo, o qual deve, portanto, ser um número reflexivo. Royce está interessado no fato de o mapa, caso correto, dever conter um mapa do mapa, o qual, por sua vez, deverá conter um mapa do mapa do mapa, e assim por diante *ad infinitum*. Esse ponto é interessante, mas não precisa ocupar a nossa atenção no momento. Na verdade, andaremos bem passando de ilustrações pitorescas para as que sejam mais completamente definidas, e, com esse propósito, não podemos fazer nada melhor do que considerar a série numérica em si.

A relação de n para $n+1$ confinada aos números indutivos, é de um-para-um, tendo para seu domínio o todo dos números indutivos, e todos, exceto 0, para seu domínio inverso. Assim, toda a classe dos números indutivos é similar àquilo que ela se torna quando omitimos o 0. Conseqüentemente, ela é uma classe "reflexiva" de acordo com a definição, e o número de seus termos é um número "reflexivo". Do mesmo modo, a relação de n para $2n$, confinada aos números indutivos, é de um-para-um, tem todos os números indutivos para seu domínio e somente os números indutivos pares para seu domínio inverso. Portanto, o número total de números indutivos é o mesmo que o número dos números indutivos pares. Essa propriedade foi usada por Leibniz (e muitos outros) como uma prova de que os números infinitos são impossíveis; julgou-se autocontraditório que "a parte fosse igual ao todo". Mas essa frase é uma das que, para serem plausíveis, dependem de uma vaguidade despercebida: a palavra "igual" tem muitos significados, mas, se for considerada como significando o que chamamos "similar", não haverá contradição alguma, porquanto uma coleção infinita pode perfeitamente bem ter partes similares a ela própria. Os que consideram isso impossível atribuíram aos números em geral, via de regra inconscientemente, propriedades que só podem ser provadas por indução matemática e que somente sua familiaridade nos faz, erroneamente, considerá-las verdadeiras além da região do finito.

Sempre que possamos "refletir" uma classe em uma parte de si mesma, a mesma relação necessariamente refletirá essa parte em uma parte menor, e assim por diante *ad infinitum*. Por exemplo, podemos, como acabamos de ver, refletir todos os números indutivos nos números pares; podemos, pela mesma

relação (a de n para $2n$), refletir os números pares nos múltiplos de 4, estes nos múltiplos de 8, e assim por diante. Trata-se de análogo abstrato do problema do mapa de Royce. Os números pares são um "mapa" de todos os números indutivos; os múltiplos de 4 são um mapa do mapa; os múltiplos de 8 são um mapa do mapa do mapa, e assim por diante. Se tivéssemos aplicado o mesmo processo à relação de n para $n+1$, o nosso "mapa" teria consistido de todos os números indutivos exceto 0; o mapa do mapa teria consistido de todos eles de 2 em diante, o mapa do mapa do mapa, de todos de 3 em diante e assim sucessivamente. A principal utilidade de tais ilustrações é produzir a familiarização com a idéia de classes reflexivas, de modo que proposições aritméticas aparentemente paradoxais possam ser prontamente traduzidas na linguagem das reflexões e classes, na qual o aspecto de paradoxo é muito menor.

Será útil darmos uma definição do número que é o número dos cardinais indutivos. Com essa finalidade, definiremos primeiro a espécie de série exemplificada pelos cardinais indutivos em ordem de grandeza. A espécie de série que é chamada uma "progressão" já foi considerada no capítulo I. É uma série que pode ser gerada por uma relação de consecutividade: todo membro da série tem de ter um sucessor, mas terá de haver apenas um que não tem predecessor, e todo membro da série tem de estar na posteridade deste termo com respeito à relação "predecessor imediato". Essas características podem ser condensadas na seguinte definição:*

Uma "progressão" é uma relação de um-para-um tal que existe apenas um termo pertencente ao domínio, mas não ao domínio inverso, e o domínio é idêntico à posteridade desse termo.

É fácil ver que uma progressão, assim definida, satisfaz aos cinco axiomas de Peano. O termo pertencente ao domínio, mas não ao domínio inverso, será o que ele chama "0"; o termo com o qual um termo tem a relação de um-para-um será o "sucessor" do termo; e o domínio da relação de um-para-um será o que ele chama "número". Tomando seus cinco axiomas na ordem, temos as seguintes traduções:

1) "0 é um número" torna-se: "O membro do domínio que não é um membro do domínio inverso é um membro do

* Cf. *Principia Mathematica*, vol. II. * 123.

domínio". Isso é equivalente à existência de tal membro, que é dado em nossa definição. Chamaremos a esse membro "primeiro termo".

2) "O sucessor de qualquer número é um número" torna-se: "O termo com o qual um determinado membro do domínio tem a relação em questão é novamente um membro do domínio". Isso é provado como se segue: De acordo com a definição, todo membro do domínio é um membro da posteridade do primeiro termo; portanto, o sucessor de um membro do domínio deve ser um membro da posteridade do primeiro termo (porque a posteridade de um termo sempre contém seus próprios sucessores, de acordo com a definição geral de posteridade), e, portanto, um membro do domínio; porque de acordo com a definição, a posteridade do primeiro termo é a mesma que a do domínio.

3) "Não há dois números com um mesmo sucessor". Isso é o mesmo que dizer que a relação é de um-para-muitos, o que de fato ela é por definição (por ser de um-para-um).

4) "0 não é o sucessor de número algum" torna-se: "O primeiro termo não é um membro do domínio inverso", o que é, novamente, um resultado imediato da definição.

5) Este axioma é a afirmação da indução matemática, e se torna: "Todo membro do domínio pertence à posteridade do primeiro termo", o que foi parte de nossa definição.

Assim, as progressões, conforme nós as definimos, têm as cinco propriedades formais das quais Peano deduz a aritmética. É fácil mostrar que duas progressões são "similares" no sentido definido para similaridade de relações no capítulo VI. Podemos, naturalmente, derivar uma relação que é serial da relação de um-para-um pela qual definimos uma progressão: o método usado é o que foi explicado no capítulo IV, e a relação é a de um termo para um membro de sua posteridade própria com respeito à relação de um-para-um original.

Duas relações transitivas assimétricas que geram progressões são similares pelas mesmas razões por que as relações de um-para-um correspondentes são similares. A classe de todos estes geradores transitivos de progressões é um "número serial" no sentido apresentado no capítulo VI; é, na verdade, o menor dos números seriais infinitos, o número ao qual Cantor deu a designação ω , com a qual ele o tornou famoso.

Mas estamos, no momento, interessados nos números *cardinais*. Como duas progressões são relações similares, segue-se

que seus domínios (ou seus campos, que são a mesma coisa que seus domínios) são classes similares. Os domínios das progressões formam um número cardinal, porquanto se pode provar facilmente que toda classe que é similar ao domínio de uma progressão é, ela própria, o domínio de uma progressão. Esse número cardinal é o menor dos números cardinais infinitos; é aquele que Cantor designou pela letra hebraica *aleph* com o sufixo "0", para distingui-lo de cardinais infinitos maiores, os quais têm outros sufixos. Assim, o nome do menor dos cardinais infinitos é $\aleph_0$.

Dizer que uma classe tem $\aleph_0$ termos é o mesmo que dizer que ela é um membro de $\aleph_0$ e isto equivale a dizer que os membros da classe podem ser arranjados em uma progressão. É óbvio que uma progressão permanece uma progressão se dela omitimos um número finito de termos, ou um sim e um não, ou todos exceto cada décimo ou cada centésimo termo. Esse método de reduzir uma progressão não faz com que ela cesse de ser uma progressão, e, portanto, não diminui o número de seus termos, que continua sendo $\aleph_0$. Na verdade, qualquer seleção de uma progressão é uma progressão se não tem um último termo, por mais esparsamente que possa ser distribuída. Tome-mos (digamos) os termos indutivos da forma n^n ou n^n . Tais números se vão tornando muito raros nas partes superiores das séries numéricas e, no entanto, há tantos deles quantos são os números indutivos conjuntamente, a saber, $\aleph_0$.

Inversamente, podemos adicionar termos aos números indutivos sem aumentarmos o seu número. Vejamos, por exemplo, as razões. Poderemos estar inclinados a pensar que deva haver muito mais razões do que inteiros, porquanto as razões cujo denominador é 1 correspondem a inteiros e parecem serem apenas uma proporção infinitesimal de razões. Mas na realidade o número de razões (ou frações) é exatamente o mesmo que o número de números indutivos, a saber, $\aleph_0$. Isso é facilmente visto arranjando-se as razões em uma série de acordo com o seguinte plano: Se a soma do numerador com o denominador de uma for menor do que a da outra, coloquemos a primeira antes da outra; se a soma for igual nas duas, coloquemos primeiro a que tenha o numerador menor. Isso nos dá a série:

$$1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5, \dots$$

Essa série é uma progressão, e todas as razões ocorrem nela mais cedo ou mais tarde. Portanto, podemos arranjar todas as razões em uma progressão e seu número é, portanto, $\aleph_0$.

Não se dá, contudo, o caso de *todas* as coleções infinitas terem $\aleph_0$ termos. O número de números reais, por exemplo, é maior do que $\aleph_0$; ele é, na verdade, $2^{\aleph_0}$, não sendo difícil provar que 2^n é maior do que n até mesmo quando n é infinito. A maneira mais fácil de provar isso é provar, primeiro que, se uma classe tem n membros, ela contém 2^n subclasses — em outras palavras, que há 2^n maneiras de selecionar alguns de seus membros (inclusive os casos extremos em que selecionamos todos ou nenhum); e, segundo, que o número de subclasses contidas em uma classe é sempre maior que o número de membros da classe. Dessas duas proposições a primeira é familiar no caso dos números finitos, não sendo difícil estendê-la aos números infinitos. A prova da segunda é tão fácil e instrutiva que a apresentaremos.

Em primeiro lugar, é claro que o número de subclasses de uma determinada classe (digamos α) é pelo menos tão grande quanto o número de membros desta, porquanto cada membro constitui uma subclasse e temos, assim, uma correlação de todos os membros com algumas das subclasses. Segue-se que, se o número de subclasses não é *igual* ao número de membros, deve ser *maior*. Porém é fácil provar que o número não é igual mostrando-se que, dada qualquer relação de um-para-um cujo domínio são os membros e cujo domínio inverso está contido entre o conjunto de subclasses, deverá haver pelo menos uma subclasse que não pertença ao domínio inverso. A prova é a seguinte:* Quando é estabelecida uma correlação R de um-para-um entre todos os membros de α e algumas das subclasses, pode ocorrer que um determinado membro x esteja correlacionado com uma subclasse da qual ele seja um membro; ou, ainda, pode suceder que x esteja correlacionado com uma subclasse da qual ele não seja um membro. Formemos toda a classe (digamos β) dos membros x que estão correlacionados com subclasses das quais eles não sejam membros. Essa classe será uma subclasse de α e não está correlacionada com membro algum de α . Porque, tomando-se primeiro os membros de β , cada

* Essa prova é tirada de CANTOR, com algumas simplificações ver *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, I. (1892), p. 77.

um deles está (pela definição de β) correlacionado com alguma subclasse da qual não é um membro, não estando, portanto, correlacionado com β . Tomando-se, a seguir, os termos que não são membros de β , cada um deles está (pela definição de β) correlacionado com alguma subclasse da qual é um membro, também não estando, portanto, correlacionado com β . Assim, nenhum membro de α está correlacionado com β . Como R é *qualquer* correlação de um-para-um de todos os membros com algumas subclasses, segue-se, então que não há correlação alguma de todos os membros com *todas* as subclasses. Não importa, para a prova, se β não tem membro algum: tudo o que acontece, no caso, é que a subclasse que se mostra ser omitida é a classe vazia. Desse modo, o número de subclasses não é, em qualquer caso, igual ao número de membros, e, portanto, de acordo com o que foi dito antes, é maior. Combinando isso com a proposição de que, se n é o número de membros, 2^n é sempre maior do que n , até mesmo quando n é infinito.

Segue-se dessa proposição que não há um máximo para os números cardinais infinitos. Por maior que seja um número infinito n , 2^n ainda será maior do que ele. A aritmética dos números infinitos é surpreendente enquanto não se fica acostumado a ela. Temos, por exemplo:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

$$\aleph_0 + n = \aleph_0, \text{ onde } n \text{ é qualquer número indutivo,}$$

$$\aleph_0^2 = \aleph_0.$$

(Isso se segue do caso das razões, uma vez que uma razão é determinada por um par de números indutivos, é fácil ver que o número de razões é o quadrado do número de números indutivos, isto é, $\aleph_0^2$; mas vimos que também é $\aleph_0$.)

$$\aleph_0^n = \aleph_0, \text{ onde } n \text{ é qualquer número indutivo.}$$

(Isso se segue de $\aleph_0^2 = \aleph_0$, por indução, porque se $\aleph_0^n = \aleph_0$, então

$$\aleph_0^{n+1} = \aleph_0^2 = \aleph_0.)$$

$$\text{Mas } 2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

De fato, como veremos depois, $2^{\aleph_0}$ é um número muito importante, isto é, o número de termos de uma série que tem "continuidade" no sentido em que essa palavra é usada por Cantor. Admitindo-se que o espaço e o tempo sejam contínuos nesse sentido (como se faz comumente em Geometria Analítica

e Cinemática), esse será o número de pontos no espaço ou de instantes de tempo; também será o número de pontos em qualquer porção finita do espaço, seja ela uma linha, uma área ou um volume. Depois de $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$ é o mais importante e interessante dos números cardinais infinitos.

Conquanto a adição e a multiplicação de números cardinais infinitos sejam sempre possíveis, a subtração e a divisão não mais dão resultados definidos, não podendo, portanto, ser empregadas como na Aritmética elementar. Vejamos a subtração, para começar: enquanto o número subtraído for finito, tudo irá bem; se o outro número for reflexivo, tudo permanecerá inalterado. Assim, $\aleph_0 - n = \aleph_0$, se n é finito; até aí, a subtração dá um resultado perfeitamente definido. Mas o mesmo não se dá quando subtraímos $\aleph_0$ de si mesmo; podemos obter então qualquer resultado de 0 até $\aleph_0$. Isso é facilmente visto em exemplos. Tirem-se dos números indutivos as seguintes coleções de $\aleph_0$ termos:

- 1) Todos os números indutivos—resto, zero.
- 2) Todos os números indutivos de n em diante—resto, os números de 0 a $n-1$, compreendendo ao todo n termos.
- 3) Todos os números ímpares—resto, todos os números pares, compreendendo $\aleph_0$ termos.

Tudo isso são maneiras diferentes de subtrair $\aleph_0$ de $\aleph_0$, e todas dão resultados diferentes.

No que diz respeito à divisão, são produzidos resultados muito similares em consequência do fato de $\aleph_0$ não se alterar quando multiplicado por 2 ou 3 ou qualquer número finito n ou por $\aleph_0$. Segue-se que $\aleph_0$ dividido por $\aleph_0$ pode ter qualquer valor de 1 até $\aleph_0$.

Da ambigüidade da subtração e divisão resulta que os números negativos e as razões não podem ser estendidas aos números infinitos. A adição, a multiplicação e a exponenciação se processam bem satisfatoriamente, mas as operações inversas — subtração, divisão e extração de raízes — são ambíguas, e as noções que delas dependem falham em se tratando de números infinitos.

A indução matemática é a característica pela qual definimos finitude, isto é, definimos um número como finito quando ele obedece à indução matemática começando de zero, e uma classe como finita quando o seu número é finito. Essa definição

acarreta o gênero de resultado que se deve esperar de uma definição, a saber, o de que os números finitos são aqueles que ocorrem na série numérica comum, 0, 1, 2, 3, ... Mas, no presente capítulo, os números infinitos que discutimos revelaram-se não apenas meramente não-indutivos, mostraram-se também *reflexivos*. Cantor usou a reflexibilidade como *definição* de infinito, acreditando-a equivalente à não-indutividade; equivale a dizer, acreditava que toda classe e todo cardinal fossem ou indutivos ou reflexivos. Isso pode ser verdadeiro, e pode muito possivelmente ser capaz de prova; mas as provas até agora oferecidas por Cantor e outros (inclusive por este autor em dias passados) são falazes por razões que serão explicadas quando considerarmos o "axioma multiplicativo". No momento, não se sabe se há classes e cardinais que não sejam reflexivos nem indutivos. Se n fosse tal cardinal, não teríamos $n = n+1$, mas n não seria um dos "números naturais" e seria carente de algumas das propriedades indutivas. Todas as classes infinitas e todos os cardinais infinitos *conhecidos* são reflexivos; mas por enquanto é bom preservarmos a mente aberta quanto a haver exemplos, até agora desconhecidos, de classes e cardinais que não são reflexivos nem indutivos. Entrementes, adotamos as seguintes definições:

Uma classe ou um cardinal finitos são aqueles indutivos.

Uma classe ou um cardinal infinitos são aqueles não-indutivos. Todas as classes e todos os cardinais *reflexivos* são infinitos; mas não se sabe no momento se todas as classes e todos os cardinais infinitos são reflexivos. Voltaremos a esse assunto no capítulo XII.

CAPÍTULO IX

Séries infinitas e ordinais

UMA "SÉRIE INFINITA" pode ser definida como uma série cujo campo é uma classe infinita. Já tivemos ocasião de considerar uma espécie de série infinita, a saber, as progressões. Neste capítulo, consideraremos o assunto de modo mais geral.

A característica mais notável de uma série infinita é o fato de o seu número serial poder ser alterado pelo mero rearranjo de seus termos. A esse respeito, há certa oposição entre os números cardinais e seriais. É possível manter-se o número cardinal de uma classe reflexiva inalterado a despeito de se adicionar termos a ela; por outro lado, é possível alterar o número serial de uma série sem acrescentar ou subtrair quaisquer termos, pelo mero rearranjo. Ao mesmo tempo, também é possível no caso de qualquer série infinita, como acontece aos cardinais, adicionar termos sem alterar o número serial: tudo depende da maneira pela qual eles são adicionados.

Para tornar as coisas mais claras, será melhor começarmos com exemplos. Consideremos primeiro várias espécies diferentes de séries que podem ser estruturadas com números indutivos arranjados segundo vários planos. Começamos com a série:

$$1, 2, 3, 4, \dots n, \dots$$

que, como já vimos, representa o menor dos números seriais infinitos, o gênero que Cantor chama ω . Passemos a reduzir essa série efetuando a operação de remover para o fim do primeiro número par que ocorra. Obtemos assim, em sucessão, as várias séries seguintes:

$$\begin{aligned} &1, 3, 4, 5, \dots n, \dots 2, \\ &1, 3, 5, 6, \dots n+1, \dots 2, 4, \\ &1, 3, 5, 7, \dots n+2, \dots 2, 4, 6, \end{aligned}$$

e assim por diante. Se imaginarmos esse processo levado tão longe quanto possível, atingiremos finalmente a série:

$$1, 3, 5, 7, \dots 2n+1, \dots 2, 4, 6, 8, \dots 2n, \dots,$$

na qual temos primeiro os números ímpares e depois todos os números pares.

Os números seriais dessas várias séries são $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\dots 2\omega$. Cada um desses números é "maior" do que qualquer um de seus predecessores no seguinte sentido:

Diz-se que um número serial é "maior" do que outro se qualquer série que tenha o primeiro número contém uma parte que tenha o segundo número, mas nenhuma série que tenha o segundo número contém uma parte que tenha o primeiro número.

Se compararmos as duas séries:

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, 4, \dots n, \dots \\ &1, 3, 4, 5, \dots n+1, \dots 2, \end{aligned}$$

veremos que a primeira é similar a parte da segunda que omite o último termo, a saber, o número dois, mas a segunda não é similar a parte alguma da primeira. (Isso é óbvio e facilmente demonstrável.) Assim, a segunda série tem um número serial maior do que o da primeira, de acordo com a definição, isto é, $\omega+1$ é maior do que ω . Mas se adicionarmos um termo ao começo de uma progressão em vez de acrescentá-lo ao final, ainda temos uma progressão. Assim, $1+\omega=\omega$. Portanto, $1+\omega$ não é igual a $\omega+1$. Isso é característico da aritmética-relação em geral: se μ e ν são dois números-relação, a regra geral é que $\mu+\nu$ não é igual a $\nu+\mu$. O caso dos ordinais finitos, em que há igualdade, é assaz excepcional.

A série que finalmente atingimos agora mesmo consistia primeiro de todos os números ímpares, depois dos números pares, e seu número serial é 2ω . Esse número é maior do que ω ou $\omega+n$, no qual n é finito. Cabe observar que, de acordo com a definição geral de ordem, cada um desses arranjos de inteiros deve ser considerado resultante de alguma relação definida. Por exemplo, aquele que meramente remove 2 para o fim será definido pela seguinte relação: "x e y são inteiros finitos, e, ou y é dois e x não é 2, ou então nenhum deles é 2 e x é menor do que y". Aquele que coloca primeiro todos os ímpares e depois todos os números pares é definido por: "x e y são inteiros finitos, e, ou x é ímpar e y é par, ou x é

menor do que y e ambos são ímpares, ou ambos são pares". Via de regra, não nos daremos ao trabalho de apresentar essas fórmulas no futuro, mas o fato de que poderiam ser *apresentadas* é essencial.

O número que designamos por 2ω , a saber, o número de uma série consistindo de duas progressões, é por vezes designado por $\omega \cdot 2$. A multiplicação, como a adição, depende da ordem dos fatores: uma progressão de pares dá uma série como:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n, \dots,$$

que é, em si, uma progressão; mas um par de progressões dá uma série duas vezes mais longa do que uma progressão. É, portanto, necessário distinguir entre 2ω e $\omega \cdot 2$. O uso é variável, usaremos 2ω para um par de progressões e $\omega \cdot 2$ para uma progressão de pares, e essa decisão governa, naturalmente, a nossa interpretação geral de " $\alpha \cdot \beta$ " quando α e β são números-relações; " $\alpha \cdot \beta$ " terá de representar uma soma apropriadamente construída de α relações, cada uma tendo β termos.

Podemos prosseguir indefinidamente no processo de triagem dos números indutivos. Por exemplo, podemos colocar primeiro os números ímpares, depois seus dobros, depois os dobros destes, e assim por diante. Obtemos desse modo a série:

$$1, 3, 5, 7, \dots; 2, 6, 10, 14, \dots; 4, 12, 20, 28, \dots; \\ 8, 24, 40, 56, \dots,$$

da qual o número é ω^2 , porquanto ela é uma progressão de progressões. Qualquer das progressões dessa nova série pode, naturalmente, ser rarefeita como rarefizemos a nossa progressão original. Podemos prosseguir até $\omega^3, \omega^4, \dots, \omega^\omega$, e assim por diante; por mais que prossigamos, poderíamos ir sempre mais adiante.

A série de todos os ordinais que pode ser obtida dessa maneira, isto é, tudo o que pode ser obtido pela rarefação de uma progressão, é, em si, mais longa do que qualquer série que pode ser obtida pelo rearranjo dos termos de uma progressão. (Isso não é difícil de provar.) Pode-se mostrar que o número cardinal da classe de tais ordinais é maior do que $\aleph_0$; é o número a que Cantor chama $\aleph_1$. O número ordinal da série de todos os ordinais que pode ser feita de um $\aleph_0$, tomados em ordem de grandeza, é chamado ω_1 . Assim, uma série cujo número ordinal é ω_1 tem um campo cujo número cardinal é $\aleph_1$.

Podemos prosseguir de ω_1 e $\aleph_1$ para ω_2 e $\aleph_2$ por um processo exatamente análogo àquele pelo qual avançamos de ω e $\aleph_0$ para ω_1 e $\aleph_1$. E nada há que nos impeça de avançar indefinidamente desse modo para novos cardinais e novos ordinais. Não se sabe se $2^{\aleph_0}$ é igual a qualquer dos cardinais da série dos *alephs*. Não se sabe sequer se é a eles comparável em grandeza; que saibamos, pode não ser nem igual nem maior nem menor do que qualquer dos *alephs*. Essa questão está ligada ao axioma multiplicativo, do qual trataremos mais tarde.

Todas as séries que vimos considerando neste capítulo são as chamadas "bem ordenadas". Uma série bem ordenada é aquela que tem um começo e tem termos consecutivos, bem como um termo *próximo seguinte* após qualquer seleção de seus termos, desde que haja qualquer termo após a seleção. Isso exclui, por outro lado, as séries compactas, nas quais há termos entre dois quaisquer, e também as séries que não têm um começo ou nas quais há partes subordinadas que não têm um começo. A série dos inteiros negativos na ordem de grandeza, não tendo começo, mas terminando com -1 , não é bem ordenada; mas, tomada na ordem inversa, começando com -1 , é bem ordenada, sendo, na realidade, uma progressão. A definição é:

Uma série "bem ordenada" é aquela na qual toda subclasse (exceto, naturalmente, a classe vazia) tem um primeiro termo.

Um número "ordinal" significa o número de relação de uma série bem ordenada. É, assim, uma espécie de número serial.

Aplica-se, entre as séries bem ordenadas, uma forma generalizada de indução matemática. Uma propriedade poderá ser dita "transfinitamente hereditária" se, quando pertence a uma certa seleção dos termos de uma série, pertence também aos sucessores imediatos destes, desde que estes tenham um sucessor. Em uma série bem ordenada, uma propriedade transfinitamente hereditária pertencente ao primeiro termo da série pertence à série inteira. Isso possibilita provar muitas proposições relativas às séries bem ordenadas, proposições essas que não são verdadeiras no tocante a todas as séries.

É fácil arranjar-se os números indutivos em séries que não são bem ordenadas e até arranjá-los em séries compactas. Por exemplo, podemos adotar o seguinte plano: considerem-se as

decimais de 0,1 (inclusive) até 1 (inclusive), arranjadas em ordem de grandeza. Elas formam assim uma série compacta; entre duas quaisquer há sempre um número infinito de outras. A seguir, omitam-se o zero e a vírgula de antes de cada um e ter-se-á uma série compacta consistindo de todos os inteiros finitos, exceto os divisíveis por 10. Se quisermos incluir os divisíveis por 10 não haverá dificuldade alguma; em vez de começarmos com 0,1 incluiremos todas as decimais menores do que 1, mas, ao removermos o zero e a vírgula, transferiremos para a direita quaisquer zeros que ocorram no início da parte decimal. Omitindo estes e voltando aos que não têm zero algum no começo da parte decimal, podemos enunciar assim a regra para o arranjo de nossos inteiros: De dois inteiros que não começam com o mesmo algarismo, o que começa com o algarismo menor vem primeiro. De dois que começam com o mesmo algarismo, mas diferem no segundo algarismo, o que tem o segundo algarismo menor vem primeiro, mas vindo antes de todo aquele sem segundo algarismo algum, e assim por diante. De modo geral, se dois inteiros concordam no tocante aos primeiros n algarismos, mas não no tocantes ao $(n+1)^{\circ}$ algarismo, vem primeiro aquele que ou não tem o $(n+1)^{\circ}$ algarismo, ou tem o $(n+1)^{\circ}$ algarismo menor do que o do outro. Essa regra de arranjo dá, como o leitor poderá facilmente convencer-se, surgimento a uma série compacta contendo todos os inteiros não-divisíveis por 10. Segue-se desse exemplo que é possível construir séries compactas tendo $\aleph_0$ termos. De fato, já vimos que há $\aleph_0$ razões e que as razões em ordem de grandeza formam uma série compacta; temos aqui, assim, outro exemplo. Voltaremos a esse assunto no próximo capítulo.

Todas as leis formais usuais de adição, multiplicação e exponenciação são obedecidas pelos cardinais transfinitos, mas somente algumas são obedecidas pelos ordinais transfinitos, e aquelas que são obedecidas por eles o são por todos os números de relação. Por "leis formais usuais" queremos dizer o seguinte:

I. Lei comutativa:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ e } \alpha \times \beta = \beta \times \alpha.$$

II. Lei associativa:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \text{ e } (\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma).$$

III. Lei distributiva:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Quando não se verifica a lei comutativa, a forma acima da lei distributiva deve ser distinguida da seguinte:

$$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha.$$

Como veremos imediatamente, uma forma pode ser verdadeira e a outra falsa.

IV. Leis da exponenciação:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}, \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma, (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}.$$

Todas essas leis se aplicam aos cardinais, sejam eles finitos ou infinitos, e aos ordinais finitos. Mas quando se trata de ordinais infinitos, ou, de fato, dos números de relação em geral, algumas delas se aplicam e algumas não. A lei comutativa não se aplica; a lei associativa se aplica; a lei distributiva (adotando a convenção que adotamos acima no tocante à ordem dos fatores em um produto) se aplica sob a forma

$$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha,$$

mas não sob a forma

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma;$$

as leis exponenciais

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma} \text{ e } (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$

ainda se aplicam, mas não a lei

$$\alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$$

que está, obviamente, ligada à lei comutativa para a multiplicação.

As definições de multiplicação e exponenciação que estão pressupostas nas proposições acima são algo complicadas. O leitor que desejar saber o que elas são e como as leis acima são provadas deve consultar o segundo volume de *Principia Mathematica*, * 172-176.

A aritmética transfinita ordinal foi estabelecida por Cantor em fase anterior à da aritmética transfinita cardinal por ter várias aplicações técnicas matemáticas que o conduziram a ela. Mas do ponto de vista da Filosofia da Matemática, é menos importante e menos fundamental do que a teoria dos cardinais transfinitos. Os cardinais são essencialmente mais simples do

que os ordinais, constituindo curioso acidente histórico o fato de terem por vez primeira aparecido como uma abstração dos outros, vindo apenas gradativamente a ser estudados por si. Isso não se aplica ao trabalho de Frege, no qual os cardinais, finitos e transfinitos, foram tratados em completa independência dos ordinais; mas foi o trabalho de Cantor que tornou o mundo cômico do assunto, enquanto o de Frege permaneceu quase desconhecido, sendo provável que principalmente por causa da dificuldade de seu simbolismo. E os matemáticos, como as demais pessoas, têm mais dificuldade em compreender e usar noções que são relativamente "simples" em sentido lógico do que em manipular noções mais complexas que são mais familiares à sua prática ordinária. Por essas razões, só gradativamente foi reconhecida a verdadeira importância dos cardinais em Filosofia Matemática. A importância dos ordinais, conquanto de modo algum pequena, é nitidamente menor do que a dos cardinais e está em grande dose fundida com a do conceito mais geral de números de relação.

CAPÍTULO X

Limites e continuidade

CONSTATOU-SE QUE A IMPORTÂNCIA do conceito de "limite" é, em Matemática, continuamente maior do que se pensava. Todo o cálculo diferencial e integral, na verdade, praticamente tudo em Matemática superior depende dos limites. Supunha-se antes que os infinitesimais estivessem envolvidos nos fundamentos desses assuntos, mas Weierstrass mostrou ser isso um erro: onde quer que se pensava ocorrerem infinitesimais, o que realmente ocorre é um conjunto de quantidades finitas que têm zero como seu limite inferior. Costumava-se pensar que o "limite" fosse uma noção essencialmente quantitativa, a saber, a noção de uma quantidade da qual outras se aproximavam cada vez mais, de modo que entre essas outras haveria algumas diferindo delas por menos do que qualquer quantidade predeterminada. Mas na realidade a noção de "limite" é puramente ordinal, não envolvendo quantidade alguma (exceto por acidente, quando a série do caso seja quantitativa). Um ponto dado em uma linha pode ser o limite de um conjunto de pontos da linha, sem que se faça necessário o emprego de coordenadas ou de medição ou de qualquer outra coisa quantitativa. O número cardinal $\aleph_0$ é o limite (na ordem de grandeza) dos números cardinais $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, embora a diferença numérica entre $\aleph_0$ e um cardinal finito seja constante e infinita: do ponto de vista quantitativo, os números finitos não se aproximam de $\aleph_0$ ao se tornarem maiores. O que torna $\aleph_0$ o limite dos números finitos é o fato de, na série, ele vir imediatamente depois destes, o que constitui um fato *ordinal* e não um fato quantitativo.

Há várias formas de noção de "limite", de complexidade crescente. A mais simples e mais fundamental, da qual resultam as demais, já foi definida, mas repetiremos aqui as definições

que a ela nos conduziram, em uma forma geral na qual as definições não exigem que a relação envolvida seja serial. Eis as definições:

Os “mínimos” de uma classe α com respeito a uma relação P são os membros de α e do campo de P (se existirem) com os quais nenhum membro de α tem a relação P .

Os “máximos” com respeito a P são os mínimos com respeito ao inverso de P .

Os “conseqüentes” de uma classe α com respeito a uma relação P são os mínimos dos “sucessores” de α , e os “sucessores” de α são os membros do campo de P com os quais todo membro de uma parte comum de α e do campo de P tem a relação P .

Os “precedentes” com respeito a P são os conseqüentes com respeito ao inverso de P .

Os “limites superiores” de α com respeito a P são os conseqüentes, desde que α não tenha máximo algum; mas se α tem um máximo, então não tem limite máximo algum.

Os “limites inferiores” com respeito a P são os limites superiores com respeito ao inverso de P .

Sempre que P tenha conexidade, uma classe poderá ter no máximo um máximo, um mínimo, um conseqüente etc. Assim, nos casos em que estamos interessados na prática, podemos falar de “o limite” (se houver algum).

Quando P é uma relação serial, podemos simplificar grandemente a definição acima de limite. Podemos, nesse caso, definir primeiro a “fronteira” de uma classe α , isto é, seus limites ou máximo, e depois passar a distinguir o caso no qual a fronteira é o limite daquele no qual é um máximo. Com esse propósito é melhor usar a noção de “segmento”.

Falaremos do “segmento de P definido por uma classe α ” como sendo todos os termos que têm a relação P com algum ou mais membros de α . Isso será um segmento no sentido definido no capítulo VII; na verdade, todo segmento no sentido aí definido é um segmento definido por alguma classe α . Se P é serial, o segmento definido por α consiste de todos os termos que precedem um ou outro termo de α . Se α tem um máximo, o segmento será formado de todos os predecessores do máximo. Mas se α não tiver máximo algum, todo membro de α precede algum outro membro de α , toda a classe α está, portanto,

incluída no segmento definido por α . Tomemos, por exemplo, a classe constituída das frações:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$$

isto é, de todas as frações da forma $1 - \frac{1}{2^n}$ para valores finitos diferentes de n . Essa série de frações não tem máximo algum, sendo claro que o segmento por ela definido (em toda a série de frações na ordem de grandeza) é a classe de todas as frações próprias. Ou, ainda, consideremos os números primos, considerados como uma seleção dos cardinais (finitos e infinitos) em ordem de grandeza. Neste caso, o segmento definido consiste de todos os inteiros finitos.

Admitindo que P seja serial, a “fronteira” de uma classe α será o termo x (se existir) cujos predecessores são o segmento definido por α .

Um “máximo” de α é uma fronteira que é um membro de α .

Um “limite superior” de α é uma fronteira que não é um membro de α .

Se uma classe não tem fronteira alguma, não tem nem máximo nem limite. Esse é o caso de um corte “irracional” de Dedekind, ou do que é chamado uma “lacuna”.

Assim, o “limite superior” de um conjunto de termos α com respeito a uma série P é o termo x (se existir) que vem depois de todos os termos de α , mas é tal que todo termo anterior vem antes de alguns dos termos de α .

Podemos definir todos os “pontos limitativos superiores” de um conjunto de termos β como todos os que são limites superiores de conjuntos de termos escolhidos de β . Teremos, naturalmente, de distinguir entre pontos limitativos superiores e inferiores. Se considerarmos, por exemplo, a série dos números ordinários:

$$1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \dots, 2\omega, 2\omega+1, \dots, 3\omega, \dots, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots,$$

os pontos limitativos superiores do campo desta série são os que não têm predecessor algum, isto é:

$$1, \omega, 2\omega, 3\omega, \dots, \omega^2, \omega^2+\omega, \dots, 2\omega^2, \dots, \omega^3, \dots$$

Os pontos limitativos superiores do campo dessa nova série serão:

$$1, \omega^2, 2\omega^2, \dots \omega^3, \omega^3 + \omega^2, \dots$$

Por outro lado, a série dos ordinais — e, na verdade, toda série bem ordenada — não tem pontos limitativos, porque não há termo algum, exceto o último, que tenha sucessores imediatos. Mas se considerarmos uma série como a das razões, todo membro dessa série é tanto um ponto limitativo superior como inferior para conjuntos apropriadamente escolhidos. Se considerarmos a série dos números reais e selecionarmos dela os números reais racionais, este conjunto (o dos racionais) terá todos os números reais como pontos limitativos superiores e inferiores. Os pontos limitativos de um conjunto são chamados sua “primeira derivada” e os pontos limitativos da primeira derivada são chamados segunda derivada, e assim por diante.

No que tange aos limites, podemos distinguir vários graus do que se pode chamar “continuidade” em uma série. A palavra “continuidade” tem sido usada por muito tempo, mas permaneceu sem qualquer definição precisa até ao tempo de Dedekind e Cantor. Cada um desses dois homens deu uma significação precisa ao termo, mas a definição de Cantor é mais estreita do que a de Dedekind: uma série que tenha a continuidade de Cantor deverá ter a continuidade de Dedekind, mas não se verifica o inverso.

A primeira definição que ocorreria naturalmente a quem estivesse buscando um significado preciso para a continuidade das séries seria defini-la como consistindo do que chamamos “compactidade”, isto é, no fato de entre dois termos quaisquer da série haver outros. Mas seria uma definição inadequada, por causa da existência de “lacunas” nas séries como a das razões. Vimos no capítulo VII que há inumeráveis modos pelos quais a série de razões pode ser dividida em duas partes, das quais uma precede inteiramente a outra e das quais a primeira não tem um último termo, enquanto a segunda não tem um primeiro termo. Tal estado de coisas parece contrário à vaga sensação que temos quanto ao que deveria caracterizar a “continuidade”, e, o que é mais, mostra que a série de razões não é o gênero de série necessário a muitos propósitos matemáticos. Tomemos, por exemplo, a Geometria: queremos estar capacitados a dizer que, quando duas linhas retas se cruzam, têm um ponto em comum, mas, se a série dos pontos em uma linha fosse similar à série de razões, as duas linhas poderiam cruzar-se em

uma “lacuna”, não tendo ponto algum em comum. Trata-se de um exemplo tosco, mas podem ser dados muitos outros para mostrar que a compactidade é inadequada como uma definição matemática de continuidade.

Foram as necessidades da Geometria, tanto quanto quaisquer outras, que conduziram à definição de continuidade “dedekindiana”. O leitor deve estar lembrado de que definimos uma série como dedekindiana quando toda subclasse do campo tem uma fronteira. (É suficiente admitir-se que há sempre uma fronteira superior, ou que há sempre uma fronteira inferior. Se uma destas é admitida, a outra pode ser deduzida.) Equivale a dizer, uma série é dedekindiana quando não há lacunas. A ausência de lacunas pode surgir ou através de termos que tenha sucessores ou pela existência de limites na ausência de máximos. Assim, uma série finita ou bem ordenada é dedekindiana, o mesmo se dando com a série de números reais. O primeiro gênero da série dedekindiana é excluído admitindo-se que a nossa série é compacta; nesse caso, a nossa série deve ter uma propriedade que pode, para muitos propósitos, ser apropriadamente chamada continuidade. Somos, assim, levados à definição:

Uma série tem “continuidade dedekindiana” quando é dedekindiana e compacta.

Mas essa definição ainda é por demais ampla para muitos propósitos. Suponhamos, por exemplo, que desejamos estar capacitados a assinalar ao espaço geométrico estas propriedades tais que assegurem que todo ponto possa ser especificado por meio de coordenadas que são números reais: isso não é garantido apenas pela continuidade dedekindiana. Queremos estar certos de que todo ponto que não possa ser especificado por coordenadas racionais o possa como o limite de uma progressão de pontos cujas coordenadas são racionais, sendo isso mais uma propriedade a qual a nossa definição não nos possibilita deduzir.

Somos assim levados a investigar mais profundamente as séries com respeito aos limites. Essa investigação foi realizada por Cantor e formou a base de sua definição de continuidade, embora, em sua forma mais simples, essa definição esconda um pouco as considerações que lhe deram surgimento. Devemos, portanto, percorrer primeiro algumas das concepções de Cantor sobre o assunto, antes de darmos sua definição de continuidade.

Cantor define uma série como “perfeita” quando todos os seus pontos são pontos limitativos e todos os seus pontos

limitativos pertencem a ela. Mas essa definição não expressa bem precisamente o que ela quer dizer. Não há correção alguma a fazer no que tange à propriedade de que todos os pontos têm de ser pontos limitativos; trata-se de propriedade pertencente às séries compactas, e a nenhuma outra, para que todos os pontos possam ser limitativos superiores ou todos limitativos inferiores. Mas se se admitir apenas que sejam pontos limitativos de um dos modos, sem se especificar qual dos dois, haverá outras séries que terão a propriedade em questão — por exemplo, a série de decimais na qual uma decimal que termina com a repetição do número 9 é distinguida de uma decimal exata correspondente e colocada imediatamente antes dele. Tal série é muito aproximadamente compacta, mas tem termos excepcionais que são consecutivos e dos quais o primeiro não tem predecessor imediato algum, enquanto o segundo não tem sucessor imediato algum. À parte essa série, as séries nas quais todos os pontos são pontos limitativos são séries compactas; e isso se aplica incondicionalmente se se especificar que todo ponto deverá ser um ponto limitativo superior (ou que todo ponto deverá ser um ponto limitativo inferior).

Embora Cantor não considere explicitamente a questão, devemos distinguir diferentes espécies de pontos limitativos de acordo com a natureza da menor subsérie pela qual eles possam ser definidos. Cantor admite que devem ser definidos por progressões, ou por regressões (que são o inverso das progressões). Quando todo membro de nossa série é o limite de uma progressão ou regressão, Cantor chama à nossa série “condensada em si mesma” (*insichdicht*).

Chegamos agora à segunda propriedade pela qual a perfeição deve ser definida, a saber, a propriedade de ser o que Cantor chama “fechada” (*abgeschlossen*). Essa propriedade foi, como vimos, definida, primeiro como consistindo no fato de todos os pontos limitativos de uma série a ela pertencerem. Mas isso só tem qualquer significação efetiva se a nossa série é dada como contida em alguma outra série maior (como é o caso, *e.g.*, de uma seleção de números reais) e se os pontos limitativos são tomados em relação à série maior. De outro modo, se uma série é considerada simplesmente por si só, ela não pode deixar de conter seus pontos limitativos. O que Cantor quer dizer não é exatamente o que ele diz; na verdade, ele diz em outras ocasiões algo bem diferente, que é o que ele quer dizer. O que ele verdadeiramente quer dizer é que toda

série subordinada que é do gênero que se deve esperar tenha um limite tem de fato um limite dentro da série dada; isto é, toda série subordinada que não tem um máximo tem um limite, isto é, toda série subordinada tem uma fronteira. Mas Cantor não enuncia isso para toda série subordinada, porém apenas para as progressões e regressões. (Não é claro até que ponto ele reconhece ser isso uma limitação.) Assim, constatamos, finalmente, ser a seguinte a definição que queremos:

Uma série é dita “fechada” (*abgeschlossen*) quando toda progressão ou regressão nela contida tem um limite nela.

Temos, então, mais esta definição:

Uma série é “perfeita” quando é condensada em si mesma e fechada, isto é, quando todo termo é o limite de uma progressão ou regressão, e toda progressão ou regressão contida na série tem um limite nela.

Ao buscar uma definição de continuidade, o que Cantor tem em mente é a busca de uma definição que se aplique à série dos números reais e a qualquer série similar àquela, mas a nenhuma outra. Com essa finalidade temos de acrescentar mais uma propriedade. Entre os números reais, alguns são racionais e alguns irracionais; embora o número de irracionais seja maior do que o de racionais, há, não obstante, racionais entre dois números reais quaisquer, por menor que seja a diferença entre os dois. Como vimos, o número de irracionais é $\aleph_0$. Isso nos dá uma propriedade extra que basta para caracterizar completamente a continuidade, a saber, a propriedade de conter uma classe de $\aleph_0$ membros de tal maneira que alguns membros dessa classe ocorrem entre dois termos quaisquer de nossa série, por mais próximos que estes estejam. Essa propriedade, adicionada à perfeição, basta para definir uma classe de séries que são todas similares e são, na verdade, um número serial. Essa classe é definida por Cantor como sendo a das séries contínuas.

Podemos simplificar ligeiramente sua definição. Para começar, dizemos:

Uma “classe mediana” de uma série é uma subclasse do campo tal que serão encontrados membros desta entre dois termos quaisquer da série.

Assim, os racionais são uma classe mediana na série dos números reais. É óbvio que não poderá haver classes medianas a não ser nas séries compactas.

Constatamos, então, que a definição de Cantor é equivalente à seguinte:

Uma série é “contínua” quando 1) é dedekindiana, 2) contém uma classe mediana com $\aleph_0$ termos.

Para evitar confusão, falaremos dessa espécie como “continuidade cantoriana”. Ver-se-á que ela implica a continuidade dedekindiana, mas não se dá o inverso. Todas as séries que tenham a continuidade cantoriana são similares, o mesmo não se dando com as que tenham a continuidade dedekindiana.

As noções de *limite e continuidade* que vimos definindo não devem ser confundidas com as noções de limite de uma função para as proximidades de um dado argumento, ou a continuidade de uma função na vizinhança de um dado argumento. Trata-se de noções diferentes, muito importantes, mas derivadas das noções acima e mais complicadas. A continuidade do movimento (se é que o movimento é contínuo) é uma instância da continuidade de uma função; por outro lado, a continuidade do espaço e do tempo (se é que são contínuos) é uma instância da continuidade das séries, ou (falando mais cautelosamente) de uma espécie de continuidade que pode, por meio de manipulação matemática suficiente, ser reduzida à continuidade das séries. Em vista da importância fundamental do movimento em Matemática aplicada, bem como por outras razões, será bom tratarmos sucintamente das noções de limite e continuidade quando aplicadas às funções: mas será melhor deixarmos esse assunto para um capítulo separado.

As definições de continuidade que vimos considerando, a saber, as de Dedekind e Cantor, não correspondem muito aproximadamente à vaga idéia que está associada com a palavra na mente do homem da rua ou do filósofo. Eles concebem a continuidade mais como uma ausência de separação, o gênero de obliteração geral de distinções que caracteriza uma cerração densa. Uma cerração dá uma impressão de vastidão sem multiplicidade ou divisões definidas. É esse gênero de coisa que um metafísico quer dizer por “continuidade”, declarando-a, muito verdadeiramente, característica de sua vida mental e da vida mental das crianças e dos animais.

A idéia geral vagamente indicada pela palavra “continuidade” quando assim empregada, ou pela palavra “fluxo”, é certamente assaz diferente daquela que vimos definindo. Tomemos, por exemplo, a série dos números reais. Cada um é o

que ele é, bem definida e decididamente; não se passa, por graus imperceptíveis, de si para outro; é uma unidade firme, separada, e sua distância de toda outra unidade é finita, embora possa ser tornada menor do que qualquer quantidade finita dada previamente determinada. A questão da relação entre a espécie de continuidade existente entre os números reais e a espécie exibida, *e.g.*, pelo que vemos em um dado tempo, é difícil e intrincada. Não se pode afirmar que as duas espécies sejam simplesmente idênticas, mas se pode, creio, muito bem afirmar que a concepção matemática que vimos considerando neste capítulo dá o esquema lógico abstrato ao qual deve ser possível trazer material empírico por manipulação apropriada, para que tal material possa ser chamado “contínuo” em qualquer sentido precisamente definível. Seria bastante impossível justificar essa tese nos limites do presente volume. O leitor que esteja interessado poderá ler uma tentativa de justificá-la, particularmente com relação ao *tempo*, pelo presente autor no *Monist* de 1914-5, bem como em partes de *Our Knowledge of the External World*. Com essas indicações, deixaremos esse problema, por mais interessante que ele seja, a fim de voltarmos a tópicos mais estreitamente ligados à Matemática.

CAPÍTULO XI

Limites e continuidade de funções

NESTE CAPÍTULO, trataremos da definição do limite de uma função (se existir) quando o argumento se aproxima de um determinado valor e também da definição do que significa uma "função contínua". Ambas essas idéias são algo técnicas e dificilmente pediriam um tratamento em mera introdução à Filosofia Matemática, não fosse o fato de, especialmente através do chamado cálculo infinitesimal, pontos de vista errôneos sobre os tópicos de que estamos tratando se terem tornado tão firmemente arraigados na mente dos filósofos profissionais que se faz necessário um esforço prolongado e considerável para a sua extirpação. Pensou-se, desde o tempo de Leibniz, que o cálculo diferencial e integral exigisse quantidades infinitesimais. Os matemáticos (especialmente Weierstrass) provaram ser isso um erro; mas os erros incorporados, como, por exemplo, no que Hegel tem a dizer sobre Matemática, resistem, e os filósofos tenderam a ignorar o trabalho de homens como Weierstrass.

Limites e continuidades de funções são, em trabalho sobre Matemática comum, definidos em termos envolvendo números. Isso não é essencial, como mostrou o Dr. Whitehead.* Contudo, começaremos com as definições contidas nos livros didáticos, passando, a seguir, a mostrar como essas definições podem ser generalizadas de modo a se aplicarem às séries em geral e não apenas às que são numéricas ou numericamente mensuráveis.

Consideremos qualquer função matemática ordinária $f(x)$, onde x e $f(x)$ são, ambos, números reais e $f(x)$ assume um único valor — isto é, quando x é dado, há apenas um valor que $f(x)$ pode ter. Chamamos a x "argumento", e a $f(x)$, "valor do argu-

mento x ". Quando uma função é o que chamamos "contínua", a idéia tosca para a qual estamos buscando uma definição precisa é a de que as pequenas diferenças em x devem corresponder a pequenas diferenças em $f(x)$, e, se fizermos as diferenças em x suficientemente pequenas, podemos fazer com que as diferenças em $f(x)$ se situem abaixo de qualquer quantidade indicada. Não queremos, a fim de garantir que uma função seja contínua, que haja saltos repentinos de modo que, para algum valor de x , qualquer alteração, por menor que seja, produza uma alteração em $f(x)$ que exceda alguma quantidade finita assinalada. As funções simples comuns da Matemática têm esta propriedade; ela pertence, por exemplo, a x^2 , x^3 , $\dots$, $\log x$, $\sin x$, e assim por diante. Mas não é, de modo algum, difícil definir as funções descontínuas. Tomemos, como um exemplo não-matemático, "o lugar de nascimento da pessoa mais jovem que viva no tempo t ". Trata-se de uma função de t ; seu valor é constante desde o tempo do nascimento de uma pessoa até o tempo do próximo nascimento, e, então, o valor se altera *repentinamente* de um lugar de nascimento para o outro. Um exemplo matemático análogo seria: "o próximo inteiro abaixo de x ", em que x é um número real. Essa função permanece constante de um inteiro para o próximo seguinte e depois dá um salto repentino. O fato real é que, conquanto as funções contínuas sejam mais familiares, elas são a exceção: há infinitamente mais funções descontínuas do que contínuas.

Muitas funções são descontínuas para um ou diversos valores da variável, mas contínuas para todos os outros valores. Tomemos, por exemplo, $\sin 1/x$. A função $\sin \theta$ passa por todos os valores de -1 até 1 toda vez que θ passa de $-\pi/2$ até $\pi/2$, ou de $\pi/2$ até $3\pi/2$, ou, de modo geral, de $(2n-1)\pi/2$ até $(2n+1)\pi/2$, em que n é qualquer inteiro. Mas se considerarmos $1/x$ quando x é muito pequeno, vemos que conforme x vai diminuindo, $1/x$ vai crescendo cada vez mais rapidamente, de modo que passa cada vez mais rapidamente pelo ciclo de valores de um múltiplo de $\pi/2$ até outro conforme x se vai tornando cada vez menor. Consequentemente, $\sin 1/x$ passa cada vez mais rapidamente de -1 até 1 e novamente de volta, conforme x se torne cada vez menor. De fato, se tomamos qualquer intervalo contendo 0 , digamos o intervalo de $-\epsilon$ a $+\epsilon$, em que ϵ é algum número muito pequeno, $\sin 1/x$ passará por um número infinito de oscilações nesse intervalo e não podemos diminuir as oscilações tornando o intervalo menor. Assim, ao redor do argumento 0 a função é descontínua. É

* Ver *Principia Mathematica*, vol. II. * 230-234.

fácil confeccionar-se funções que são descontínuas em vários lugares, ou em $\aleph_0$ lugares ou em qualquer parte. Serão encontrados exemplos em qualquer livro que trate da teoria de funções de variável real.

Passando agora a buscar uma definição precisa do que se quer dizer ao afirmar que uma função é contínua para um dado argumento quando tanto o argumento como o valor são números reais, definimos primeiro uma "vizinhança" de um número x como sendo todos os números de $x - \varepsilon$ até $x + \varepsilon$, onde ε é algum número que, em casos importantes, será muito pequeno. É claro que a continuidade de um dado ponto tem que vem com o que acontece em qualquer vizinhança daquele ponto, por menor que seja.

O que desejamos é: Se a é o argumento para o qual queremos seja a nossa função contínua, definamos primeiro uma vizinhança (digamos α) contendo o valor fa que a função tem para o argumento a ; desejamos que, se tomarmos uma vizinhança suficientemente pequena contendo a , todos os valores para os argumentos em toda essa vizinhança estejam contidos na vizinhança α , independentemente de quão pequena tenhamos feito α . Equivale a dizer, se decretamos que a nossa função não deve diferir de fa por mais do que uma quantidade muito pequena, podemos sempre encontrar um trecho de números reais, tendo a em seu meio, tal que através de todo esse trecho fx não diferirá de fa por mais do que a quantidade pequenina prescrita. E isso deverá permanecer verdadeiro seja qual for a quantidade pequenina que possamos seleccionar. Assim sendo, somos levados à seguinte definição:

Diz-se que uma função $f(x)$ é "contínua" para o argumento a se, para todo número positivo σ , diferente de 0, mas tão pequeno quanto nos aprouver, existir um número positivo ε , diferente de 0, tal que, para todos os valores de z que sejam numericamente menores* do que ε , a diferença $f(a+z) - f(a)$ seja numericamente menor do que σ .

Nessa definição, σ define pela primeira vez uma vizinhança de $f(a)$, a saber, a vizinhança de $f(a) - \sigma$ até $f(a) + \sigma$. A definição passa então a dizer que podemos (por meio de ε) definir uma vizinhança, a saber, a de $a - \varepsilon$ até $a + \varepsilon$, tal que, para todos os

* Um número é dito numericamente menor do que ε quando se situa entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$.

argumentos dentro dessa vizinhança, o valor da função fica dentro da vizinhança de $f(a) - \sigma$ até $f(a) + \sigma$. Se isso puder ser feito, a função será "contínua" para o argumento a , seja como for escolhido σ .

Até agora não definimos o "limite" de uma função para um dado argumento. Se o tivéssemos feito, poderíamos ter definido diferentemente a continuidade de uma função: uma função é contínua em um ponto no qual o seu valor é o mesmo que o limite de seu valor para a aproximação, seja de cima ou seja de baixo. Mas só a função excepcionalmente "domesticada" tem um limite definido conforme o argumento se aproxima de um ponto dado. A regra geral é que uma função oscila e que, dada qualquer vizinhança de um determinado argumento, por pequeno que seja, todo um trecho de valores ocorrerá para os argumentos dentro dessa vizinhança. Como se trata de uma regra geral, consideremo-la primeiro.

Consideremos o que pode acontecer ao aproximar-se o argumento de algum valor a , vindo de baixo. Equivale a dizer, desejamos considerar o que acontece aos argumentos contidos no intervalo de $a - \varepsilon$ até a , onde ε é algum número que, em casos importantes, será muito pequeno.

Os valores da função para argumentos de $a - \varepsilon$ até a (excluído a) serão um conjunto de números reais que definirá uma certa secção do conjunto de números reais, a saber, a secção consistindo dos números que não são maiores do que *todos* os valores para os argumentos de $a - \varepsilon$ até a . Dado qualquer número nesta secção, há valores pelo menos tão grandes quanto esse número para argumentos entre $a - \varepsilon$ e a , isto é, para argumentos que são pouquíssimo inferiores a a (se ε é muito pequeno). Tomemos todos os ε possíveis e todas as possíveis secções correspondentes. A parte comum de todas essas secções será por nós chamada "secção final" conforme o argumento se aproxima de a . Dizer que um número z pertence à secção final equivale a dizer que por menor que façamos ε , haverá argumentos entre $a - \varepsilon$ e a para os quais o valor da função não é menor do que z .

Podemos aplicar exatamente o mesmo processo às secções superiores, isto é, às secções que ascendem de algum ponto até ao topo, em vez de ascenderem de baixo até algum ponto. Aqui tomamos os números que não são *menores* do que todos os valores para os argumentos de $a - \varepsilon$ até a ; isso define uma secção superior que variará conforme ε variat. Tomando a parte comum

de todas essas secções para todos os ϵ possíveis, obtemos a "secção final superior". Dizer que um número z pertence à secção final superior equivale a dizer que, por menor que façamos ϵ , haverá argumentos entre $a-\epsilon$ e a para os quais o valor da função não é maior do que z .

Se um termo z pertence tanto à secção final como à secção final superior, diremos que pertence à "oscilação final". Podemos ilustrar o assunto considerando mais uma vez a função $\text{sen } 1/x$ conforme x se aproxima do valor 0. Admitiremos, a fim de nos enquadrarmos nas definições acima, que esse valor é aproximado de baixo.

Começemos com a "secção final". Entre $-\epsilon$ e 0, seja qual for ϵ , a função assumirá o valor 1 para certos argumentos, mas nunca assumirá qualquer valor maior. Assim sendo, a secção final consiste de todos os números reais, positivos e negativos, até 1, inclusive; isto é, consiste de todos os números negativos juntamente com 0, juntamente com os números positivos ascendentes até 1, inclusive.

Similarmente, a "secção final superior" consiste de todos os números positivos juntamente com 0, juntamente com os números negativos, de cima para baixo até -1 , inclusive.

Assim, a "oscilação final" consiste de todos os números reais de -1 até 1, ambos incluídos.

Podemos dizer que a "oscilação final" de uma função conforme o argumento se aproxima de a de baixo para cima consiste de todos os números x tais que, por mais próximos que cheguemos de a , ainda encontraremos valores tão grandes quanto x e valores tão pequenos quanto x .

A oscilação final poderá não conter termo algum, ou um termo, ou muitos termos. Nos primeiros dois casos, a função tem um limite definido para aproximações de baixo para cima. Se a oscilação tem um termo, isso é razoavelmente óbvio. É igualmente verdadeiro se ela não tem termo algum; pois não é difícil provar que, se a oscilação final é nula, a fronteira da secção final é a mesma que a da secção final superior, e pode ser definida como o limite da função para aproximações de baixo para cima. Mas se a oscilação final tem muitos termos, não há limite definido algum para a função, para aproximações de baixo para cima. Neste caso, podemos tomar as fronteiras superior e inferior da oscilação final (isto é, a fronteira inferior da secção final superior e a fronteira superior da secção final)

como limites superior e inferior de seus valores "finais" para aproximações de baixo para cima. Similarmente, obtemos limites inferiores e superiores dos valores "finais" para aproximações de cima para baixo. Assim, temos, no caso geral, *quatro* limites para uma função, para aproximações a um dado argumento. O limite para um dado argumento a só existe quando todos esses quatro são iguais, e é, então, seu valor comum. Se é também o *valor* para o argumento a , a função é contínua para esse argumento. Isso pode ser tomado como definindo continuidade: é equivalente à nossa definição anterior.

Podemos definir o limite de uma função para um dado argumento (se ele existe) sem passarmos pela oscilação final e pelos quatro limites do caso geral. A definição prossegue, nesse caso, exatamente como prosseguiu a definição anterior de continuidade. Definamos o limite para aproximações de baixo para cima. Para que haja um limite definido para aproximações a a de baixo para cima, é necessário e suficiente que, dado qualquer número pequeno σ , dois valores para os argumentos suficientemente próximos de a (mas ambos menores do que a) se diferenciem de menos do que σ ; isto é, se ϵ for suficientemente pequeno e nossos argumentos se situarem ambos entre $a-\epsilon$ e a (excluído a), então a diferença entre os valores desses argumentos será menor do que σ . Isso se aplicará para qualquer σ , por menor que seja; nesse caso, a função tem um limite para aproximações de baixo para cima. Similarmente, definimos o caso em que há um limite para aproximações de cima para baixo. Esses dois limites, mesmo quando ambos existem, não necessitam ser iguais; e se são idênticos, não necessitam, ainda assim, ser idênticos ao *valor* para o argumento de a . É somente neste último caso que chamamos a função *contínua* para o argumento a .

Uma função é chamada "contínua" (sem restrição) quando é contínua para todo argumento.

Outro método ligeiramente diferente de atingir a definição de continuidade é o seguinte:

Digamos que uma função "converge finalmente para uma classe α " se há algum número real que, para este argumento e para todos os argumentos maiores do que este, o valor da função é um membro da classe α . Similarmente, diremos que uma função "converge para α conforme o argumento se aproxima de x de baixo para cima" se há algum argumento y menor

do que x , tal que, através do intervalo de y (inclusive) até x (exclusive), a função tem valores que são membros de α . Podemos agora dizer que uma função é contínua para o argumento a , para o qual ela tem o valor fa , se satisfizer nossas condições, a saber:

1) Dado qualquer número real menor do que fa , a função converge para os sucessores desse número conforme o argumento se aproxima de a vindo de baixo.

2) Dado qualquer número real maior do que fa , a função converge para os predecessores desse número conforme o argumento se aproxima de a vindo de baixo.

3) e 4) Condições similares para aproximações a a vindo de cima.

As vantagens dessa forma de definição estão em que ela analisa as condições de continuidade em quatro, derivadas de se considerar os argumentos e os valores respectivamente maiores ou menores do que o argumento e o valor para os quais a continuidade tem de ser definida.

Podemos agora generalizar as nossas definições de modo a que se apliquem a séries que não são numéricas ou que não se saiba serem numericamente mensuráveis. O caso do movimento é conveniente de se ter em mente. Há uma história de H. G. Wells que ilustrará, do ponto de vista do caso do movimento, a diferença entre o limite de uma função para um dado argumento. O herói da história, que possuía, sem o saber, o poder de realizar seus desejos, estava sendo atacado por um policial, mas, ao exclamar "vá para...", constatou que o policial desapareceu. Se $f(t)$ era a posição do policial no tempo t e t_0 o momento da exclamação, o limite das posições do policial conforme t se aproximou de t_0 vindo de baixo estaria em contato com o herói, enquanto o valor para o argumento t_0 era... Mas se supõe sejam tais ocorrências raras no mundo, admitindo-se, embora sem qualquer evidência adequada, que todos os movimentos são contínuos, isto é, que, dado qualquer corpo, se $f(t)$ é a sua posição no tempo t , $f(t)$ é uma função contínua de t . É o significado de "continuidade" envolvido em tais enunciados que desejamos definir agora tão simplesmente quanto possível.

As definições dadas para o caso de funções nas quais o argumento e o valor são números reais podem ser prontamente adaptadas ao uso mais geral.

Admitamos sejam P e Q duas relações, que é bom imaginar-se seriais, embora isso não seja necessário às nossas definições. Seja R uma relação de um-para-muitos cujo domínio está contido no campo de P , enquanto o seu domínio inverso está contido no campo de Q . Então R é (em sentido generalizado) uma função cujos argumentos pertencem ao campo de Q , enquanto seus valores pertencem ao campo de P . Suponhamos, por exemplo, estar lidando com uma partícula que se desloca em uma linha: seja Q a série do tempo, P a série dos pontos sobre a nossa linha da esquerda para a direita, R a relação da posição de nossa partícula sobre a linha no tempo a com o tempo a , de modo que "a R de a " é sua posição no tempo a . Essa ilustração pode ser conservada em mente através de nossas definições.

Diremos que a função R é contínua para o argumento a se, dado qualquer intervalo α na P -série contendo o valor da função para o argumento a , houver um intervalo na Q -série que não contenha a como ponto extremo e tal que, através de todo esse intervalo, a função tenha valores que são membros de α . (Por "intervalo" queremos dizer todos os termos entre dois quaisquer, isto é, se x e y são dois membros do campo de P , e x tem a relação P com y , queremos dizer por "P-intervalo entre x e y " todos os termos z tais que x tem a relação P com z e z tem a relação P com y — juntamente, quando assim enunciado, com os próprios x ou y .)

Podemos facilmente definir a "secção final" e a "oscilação final". Para definir a "secção final" para aproximações ao argumento a vindo de baixo, tome-se qualquer argumento y que preceda a (isto é, tenha a relação Q com a), tomem-se os valores da função para todos os argumentos até y , inclusive, e forme-se a secção de P definida por esses valores, isto é, aqueles membros da P -série que são anteriores ou idênticos a alguns desses valores. Formem-se todas essas secções para todos os y que precedam a e tome-se sua parte comum; isso será a secção final. A secção final superior e a oscilação final são então definidas exatamente como no caso anterior.

A adaptação da definição de convergência e da resultante definição alternativa de continuidade não oferece dificuldade alguma.

Dizemos que uma função R é "finalmente Q -convergente para α " se houver um membro y do domínio inverso de R e do campo de Q tal que o valor da função para o argumento y e

para qualquer argumento com o qual y tenha a relação Q é um membro de α . Dizemos que R " Q -converge para α conforme o argumento se aproxima de um dado argumento α " se há um termo y tendo a relação Q com a e pertencente ao domínio inverso de R e tal que o valor da função para qualquer argumento do Q -intervalo de y (inclusive) para a (exclusive), pertence a α .

Das quatro condições que uma função tem de preencher a fim de que seja contínua para o argumento a , a primeira é, chamando-se b ao valor para o argumento a :

Dado qualquer termo tendo a relação P com b , R Q -converge para os sucessores de b (com respeito a P) conforme o argumento se aproxima de a vindo de baixo.

A segunda condição é obtida substituindo-se P por seu inverso; a terceira e a quarta são obtidas a partir da primeira e da segunda substituindo-se Q por seu inverso.

Nada há, portanto, nas noções de limite de uma função ou de continuidade de uma função que envolva essencialmente número. Ambas podem ser definidas de modo geral e muitas proposições a respeito delas podem ser provadas para duas séries quaisquer (sendo uma a série do argumento e a outra a série do valor). Pode ver-se que as definições não envolvem infinitesimais. Envolvem classes infinitas de intervalos que se tornam cada vez menores sem qualquer limite a não ser zero, mas não envolvem qualquer intervalo que não seja finito. Isso é análogo ao fato de que, se uma linha de um centímetro de comprimento for reduzida à metade e depois novamente reduzida à metade, e assim por diante indefinidamente, jamais atingiremos por este meio um infinitesimal: após n bissecções, o comprimento de nosso fragmento de reta será $\frac{1}{2^n}$ de um centímetro; e será um comprimento finito, seja qual for o número finito n . Os processos de bissecções sucessivas não conduzem a divisões cujo número ordinal é infinito, porquanto é essencialmente um processo de um a um. Assim, os infinitesimais não serão atingidos dessa maneira. As confusões em torno desses tópicos tiveram muito a ver com as dificuldades encontradas na discussão de infinidade e continuidade.

CAPÍTULO XII

Seleções e o axioma multiplicativo

TEMOS DE CONSIDERAR neste capítulo um axioma que pode ser enunciado, mas não provado, em termos de Lógica e que é conveniente, embora não indispensável, em certas partes da Matemática. É conveniente no sentido de muitas proposições interessantes, as quais parece natural supor-se verdadeiras, não poderem ser provadas sem a sua ajuda; mas não é indispensável, porque até mesmo sem essas proposições os assuntos em que ocorrem ainda existem, embora de uma forma algo mutilada.

Antes de enunciarmos o axioma multiplicativo, devemos primeiro explicar a teoria das seleções e a definição de multiplicação quando o número de fatores pode ser infinito.

Ao se definir as operações aritméticas, o único procedimento correto é construir-se uma classe real (ou relação, no caso de números de relação) tendo o número exigido de termos. Isso requer por vezes certo grau de engenho, mas é essencial para provar a existência do número definido. Tomemos, como exemplo mais simples, o caso da adição. Suponhamos que nos seja dado o número cardinal μ e uma classe α que tem μ termos. Como definiremos $\mu + \mu$? Para esse propósito devemos ter duas classes que tenham μ termos, não devendo as duas se interceptar. Podemos construir de várias maneiras tais classes a partir de α , sendo talvez a que se segue a mais simples: Formemos primeiro todos os pares ordenados cujo primeiro termo é uma classe consistindo de um único membro de α , e cujo segundo termo é a classe vazia; depois, formemos todos os pares ordenados cujo primeiro termo é a classe vazia e cujo segundo termo é uma classe consistindo de um único membro de α . Essas duas classes de pares não têm membro algum em comum e a soma lógica das duas terá $\mu + \mu$ termos. De modo exata-

mente análogo podemos definir $\mu + \nu$, dado que μ seja o número de alguma classe α e ν seja o número de alguma classe β .

Tais definições são, via de regra, meramente uma questão de dispositivo técnico apropriado. Mas no caso da multiplicação, em que o número de fatores pode ser infinito, importantes problemas surgem da definição.

A multiplicação, quando o número de fatores é finito, não oferece dificuldade alguma. Dadas duas classes α e β , tendo a primeira μ termos e a segunda ν termos, podemos definir $\mu + \nu$ como sendo o número de pares ordenados que podem ser formados escolhendo-se o primeiro termo em α e o segundo em β . Veremos que essa definição não exige que α e β não se interceptem; ela permanece adequada até mesmo quando α e β são idênticos. Por exemplo, seja α uma classe cujos membros são x_1, x_2, x_3 . Então, a classe usada para definir o produto $\mu + \mu$ é a classe de pares:

$$(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3); (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3); \\ (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3).$$

Essa definição permanece aplicável quando μ ou ν ou ambos são infinitos, podendo ser estendida, passo a passo a três ou a quatro ou a qualquer número finito de fatores. Não surge dificuldade alguma no tocante a essa definição, exceto a resultante de não poder ela ser estendida a um número infinito de fatores.

O problema da multiplicação quando o número de fatores pode ser infinito surge da seguinte maneira: Suponhamos que temos uma classe k consistindo de classes; suponhamos seja dado o número de termos de cada uma dessas classes. Como definiremos o produto de todos esses números? Se pudermos estruturar a nossa definição com generalidade, ela será aplicável, seja k finita ou infinita. Cabe observar que o problema deve ser capaz de cuidar do caso quando k for infinita e não quando seus membros o sejam. Se k não for infinita, o método acima definido é tão aplicável quando seus membros forem infinitos como quando forem finitos. É com o caso em que k é infinito, embora seus membros possam ser finitos, que temos de arranjar um meio de tratar.

O método que se segue de definir a multiplicação de modo geral se deve ao Dr. Whitehead. É explicado e tratado com

detalhe em *Principia Mathematica*, vol. I, * 80 ss., e vol. II, * 114.

Suponhamos, para começar, que k seja uma classe de classes das quais não há duas que se interceptem — digamos, os eleitorados de um país em que não há pluralidade de votação, sendo cada eleitorado considerado uma classe de eleitores. Dediquemo-nos agora à tarefa de escolher um termo de cada classe para ser seu representante, como o fazem os eleitorados quando elegem membros para o Parlamento, admitindo-se que, por lei, cada eleitorado tenha de escolher um homem que vote no mesmo distrito eleitoral. Chegamos assim a uma classe de representantes, que formam o nosso Parlamento, sendo cada um escolhido em cada eleitorado. Quantas maneiras diferentes haverá para se escolher um Parlamento? Cada eleitorado pode selecionar qualquer um de seus eleitores, e, portanto, se houver μ eleitores em um eleitorado, este poderá fazer μ escolhas. As escolhas dos diferentes eleitorados são independentes; assim, é óbvio que, quando o número total de eleitorados é finito, o número de Parlamentares possíveis é obtido multiplicando-se os números de eleitores dos vários eleitorados. Quando não sabemos se o número de eleitorados é finito ou infinito, podemos considerar o número de Parlamntos possíveis como *definindo* o produto dos números dos diversos eleitorados. Esse é o método pelo qual os produtos infinitos são definidos. Abandonaremos agora a nossa ilustração, passando a enunciados exatos.

Seja k uma classe de classes e admitamos, para começar, que não haja o caso de dois membros de k se interceptarem, isto é, se α e β são dois membros diferentes de k , nenhum membro de um é um membro do outro. Chamamos a uma classe uma “seleção” de k quando consiste de apenas um termo retirado de cada membro de k ; isto é, μ é uma “seleção” de k se todo membro de μ pertence a algum membro de k e se, sendo α um membro qualquer de k , μ e α têm exatamente um termo em comum. Chamaremos “classe multiplicativa” de k à classe de todas as “seleções” obtidas de k . O número de termos da classe multiplicativa de k , isto é, o número de seleções possíveis de k , é definido como o produto dos números dos membros de k . Essa definição é igualmente aplicável seja k finita ou infinita.

Antes de podermos estar totalmente satisfeitos com essas definições, devemos remover a restrição de que não haja o caso de dois membros de k se interceptarem. Com esse pro-

pósito, em vez de definirmos primeiro uma classe chamada uma "seleção", definiremos primeiro uma seleção a que chamaremos uma "seletora". Uma relação R será chamada "seletora" de k se, de todo membro de k , selecionar um termo para representante daquele membro, isto é, se, dado qualquer membro α de k , houver apenas um termo x que é um membro de α e tem a relação R com α ; e isso será tudo o que R fará. A definição formal é:

Uma "seletora" de uma classe de classes k é uma relação de um-para-muitos tendo k para seu domínio inverso e tal que, se x tem essa relação com α , então x é um membro de α .

Se R é uma seletora de k e α é um membro de k , sendo x o termo que tem a relação R com α , chamamos x "representante" de α com respeito à relação R .

Uma "seleção" de k será agora definida como o domínio de uma seletora; e a classe multiplicativa será, como antes, a classe das seleções.

Mas quando os membros de k se interceptam pode haver mais seletoras do que seleções, porquanto um termo x que pertence a duas classes α e β pode ser selecionado uma vez para representar α e mais uma vez para representar β , dando surgimentos a diferentes seletoras nos dois casos, mas à mesma seleção. Para definir a multiplicação, necessitamos das seletoras mais do que das seleções. Assim, definimos:

"O produto dos números dos membros de uma classe de classes k " é o número de seletoras de k .

Podemos definir a exponenciação por uma adaptação do plano acima. Podemos, naturalmente, definir μ^v como o número de seletoras de v classes, cada uma das quais com μ termos. Mas há objeções a essa definição, resultante do fato de o axioma multiplicativo (de que falaremos dentro em pouco) ser desnecessariamente envolvido, caso adotado. Adotamos, em substituição, a seguinte construção:

Seja α uma classe contendo μ termos e β outra contendo v termos.

Admitamos que y seja um membro de β e formemos a classe de todos os pares ordenados que têm y para seu segundo termo e um membro de α para seu primeiro termo. Haverá μ desses pares para um dado y , porquanto qualquer membro de α poderá ser escolhido para primeiro termo e α tem μ membros. Se formarmos agora todas as classes desse gênero que

resultam de se variar y , obteremos ao todo v classes, porquanto y poderá ser qualquer membro de β e β tem v membros. Essas v classes são, cada uma delas, uma classe de pares, a saber, todos os pares que podem ser formados de um membro variável de α e um membro fixo de β . Definimos μ^v como um número de seletoras obtidas da classe que consiste dessas v classes. Ou podemos igualmente bem definir μ^v como o número de seleções, pois, como as nossas classes de pares são mutuamente exclusivas, o número de seletoras é o mesmo que o de seleções. Uma seleção de nossa classe de classes será um conjunto de pares ordenados, dos quais haverá exatamente um tendo qualquer membro dado de β para seu segundo termo, podendo o seu primeiro termo ser qualquer membro de α . Assim, μ^v é definido pelas seletoras de um certo conjunto de v classes tendo cada uma μ termos, mas o conjunto terá uma certa estrutura e uma composição mais maleável do que em geral. A relevância disso para o axioma multiplicativo aparecerá dentro em pouco.

O que se aplica à exponenciação se aplica também ao produto de dois cardinais. Podemos definir " $\mu \times v$ " como a soma dos números de v classes tendo cada uma μ termos, mas preferimos defini-lo como o número de pares ordenados a serem formados consistindo de um membro de α seguido de um membro de β , em que α tem μ termos e β tem v termos. Esta definição também tem por objetivo fugir à necessidade de se pressupor o axioma multiplicativo.

Com as nossas definições, podemos provar as leis formais usuais da multiplicação e exponenciação. Mas há uma coisa que não podemos provar: não podemos provar que um produto só é zero quando um de seus fatores é zero. Podemos prová-lo quando o número de fatores é finito, mas não quando é infinito. Em outras palavras, não podemos provar que, dada uma classe de classes nenhuma das quais é vazia, deverá haver seletoras delas; ou que, dada uma classe de classes mutuamente exclusivas, deverá haver pelo menos uma classe consistindo de um termo retirado de cada uma das classes dadas. Essas coisas não podem ser provadas; e, embora pareçam obviamente verdadeiras à primeira vista, a reflexão traz dúvida sempre crescente até que finalmente nos contentamos em registrar a suposição e suas consequências, como registramos o axioma das paralelas, sem admitirmos que podemos saber se é verdadeiro ou falso. A suposição é, com fraseado livre, a de que as seletoras e as seleções existem quando devemos esperá-las. Há muitas maneiras equi-

valentes de enunciar a mesma coisa com precisão. Podemos começar com a seguinte:

"Dada qualquer classe de classes mutuamente exclusivas, das quais nenhuma é vazia, há pelo menos uma classe que tem exatamente um termo em comum com cada uma das classes dadas."

A essa proposição chamaremos o "axioma multiplicativo".* Daremos primeiro várias formas equivalentes da proposição e, depois, consideraremos certas maneiras nas quais sua verdade ou falsidade é de interesse para a Matemática.

O axioma multiplicativo é equivalente à proposição de que um produto só é zero quando um de seus fatores é zero; isto é, à de que, se qualquer número de números cardinais forem multiplicativos entre si, o resultado não poderá ser 0, a menos que um dos números envolvidos seja 0.

O axioma multiplicativo é equivalente à proposição de que, se R for uma relação qualquer, e κ qualquer classe contida no domínio inverso de R , então haverá pelo menos uma relação de um-para-muitos implicando R e tendo κ para seu domínio inverso.

O axioma multiplicativo é equivalente à suposição de que, se α for uma classe qualquer e κ todas as subclasses de α , com exceção da classe vazia, então haverá pelo menos uma seletora de κ . Essa foi a forma sob a qual o axioma multiplicativo foi pela primeira vez colocado sob a atenção do mundo erudito por Zermelo, em seu *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*.** Zermelo considera o axioma uma verdade inquestionável. Deve-se confessar que, enquanto ele não o tornou explícito, os matemáticos usaram-no sem qualquer escrúpulo; mas parece que o fizeram inconscientemente. E o crédito que se deve dar a Zermelo por torná-lo explícito é inteiramente independente da questão de ser o mesmo verdadeiro ou falso.

Zermelo mostrou, na prova acima mencionada, que o axioma multiplicativo é equivalente à proposição de que toda classe pode ser bem ordenada, isto é, pode ser arranjada em uma série

* Ver *Principia Mathematica*, vol. I. * 88. Também vol. III. * 257-258.

** *Mathematische Annalen*, vol. LIX, pp. 514-6. Dessa forma, falaremos dele como axioma de ZERMELO.

na qual toda subclasse tem um primeiro termo (exceto, naturalmente, a classe vazia). A prova completa dessa proposição é difícil, mas não é difícil ver-se o princípio geral em que se baseia. É usada a forma a que chamamos "axioma de Zermelo", isto é, é pressuposto que, dada qualquer classe α , há pelo menos uma relação de um-para-muitos, R cujo domínio inverso consiste de todas as subclasses de α existentes e é tal que, se x tem a relação R com ξ , então x é um membro de ξ . Tal relação colhe um "representante" de cada subclasse; naturalmente, acontecerá com frequência duas subclasses terem o mesmo representante. O que Zermelo faz, de fato, é separar os membros de α , um a um, por meio de R e da indução transfinita. Separamos primeiro o representante de α ; chamá-lo-emos x_1 . Depois, tomamos o representante da classe consistindo de todos os membros de α exceto x_1 ; chamá-lo-emos x_2 . Ele deverá ser diferente de x_1 , porque todo representante é membro de sua classe, e x_1 está excluído dessa classe. Prosseguimos de modo similar, excluindo x_2 e fazendo x_3 representante do que resta. Obtemos, desse modo, primeiro uma progressão $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ admitindo que α não seja finita. Depois, separamos toda a progressão seja x_ω o representante do que é deixado de α . Dessa maneira, podemos prosseguir até que nada reste. Os sucessivos representantes formarão uma série bem ordenada contendo todos os membros de α . (O que ficou descrito acima é, naturalmente, apenas uma indicação das linhas gerais da prova.) Essa proposição é chamada "teorema de Zermelo".

O axioma multiplicativo é também equivalente à suposição de que, de dois cardinais que não são iguais, um deve ser o maior. Se o axioma for falso, haverá cardinais μ e ν tais que μ não seja menor do que, igual a, nem maior do que ν . Vimos que $\aleph_1$ e $2^{\aleph_0}$ formam possivelmente uma instância de tal par.

Podem ser dadas muitas outras formas do axioma, mas as apresentadas acima são as mais importantes das até hoje conhecidas. Quanto à verdade ou falsidade do axioma em qualquer de suas formas, nada se sabe no presente.

São numerosas e importantes as proposições que dependem do axioma sem que se saiba serem ou não a ele equivalentes. Tomemos, primeiro, a conexão da adição com a multiplicação. Naturalmente pensamos que a soma de ν classes mutuamente exclusivas, cada uma com μ termos, deva ter $\mu \times \nu$ termos. Quando ν é finito, isso pode ser provado. Mas quando ν é

infinito, não pode ser provado sem o axioma multiplicativo, exceto quando, graças a alguma circunstância especial, a existência de certas seletoras possa ser provada. É a seguinte a maneira pela qual o axioma multiplicativo entra no processo: Suponhamos que temos dois conjuntos de ν classes mutuamente exclusivas, cada uma com μ termos, e desejamos provar que a soma de um conjunto tem tantos termos quanto a soma do outro. Para provar isso, temos de estabelecer uma relação de um-para-um. Acontece, que como há ν classes em cada caso, há alguma relação de um-para-um entre os dois conjuntos de classes; mas o que desejamos é uma relação de um-para-um entre seus termos. Consideremos alguma relação de um-para-um, S , entre as classes. Então, se κ e λ são os dois conjuntos de classes e α é algum membro de κ , haverá um membro β de λ que será o correlato de α com respeito a S . Mas α e β têm, cada um, μ termos sendo, portanto, similares. Há, conseqüentemente, correlações de um-para-um entre α e β . O problema está justamente em haver tantas. Para obtermos uma correlação de um-para-um da soma de κ com a soma de λ , temos de escolher *uma seleção* de conjunto de classes de correlacionadoras, sendo uma classe do conjunto formada de todas as correlacionadoras de α com β . Se κ e λ forem infinitos, não poderemos, em geral, saber se tal seleção existe, a menos que saibamos ser verdadeiro o axioma multiplicativo. Portanto, não podemos estabelecer a espécie conexão usual entre adição e multiplicação.

Esse fato tem várias conseqüências curiosas. Para começar, sabemos que $\aleph_0^2 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Infere-se comumente disso que a soma de $\aleph_0$ classes, cada uma com $\aleph_0$ membros, deverá ter, ela própria, $\aleph_0$ membros, mas essa inferência é falaciosa, porquanto não sabemos se o número de termos de tal soma é $\aleph_0 \times \aleph_0$, nem, conseqüentemente, se é $\aleph_0$. Isso influi sobre a teoria dos ordinais transfinitos. É fácil provar que um ordinal que tem $\aleph_0$ predecessores deve ser um daqueles a que Cantor chama "segunda classe", isto é, tal que uma série tendo esse número ordinal terá $\aleph_0$ termos em seu campo. É também fácil ver que, se tomarmos qualquer progressão de ordinais da segunda classe, os predecessores de seu limite formam no máximo a soma de $\aleph_0$ classes, tendo cada uma $\aleph_0$ termos. É daí inferido — falaciosamente, a menos que o axioma multiplicativo seja verdadeiro — que os predecessores do limite são em número de $\aleph_0$ e, portanto, que o limite é um número da "segunda classe". Equivale a dizer, supõe-se provado que qualquer progressão de ordinais da segunda classe tem um limite que é,

por sua vez, um ordinal da segunda classe. Essa proposição, com o corolário de que ω_1 (o menor ordinal da terceira classe) não é o limite de progressão alguma, está envolvida na maior parte da teoria reconhecida dos ordinais da segunda classe. Em vista da maneira pela qual o axioma multiplicativo está envolvido, a proposição e seu corolário não podem ser considerados provados. Podem ser ou não verdadeiros. Tudo o que podemos dizer no presente é que não sabemos. Assim, a maior parte da teoria dos ordinais da segunda classe não deve ser considerada provada.

Outra ilustração poderá ajudar a esclarecer esse ponto. Sabemos que $2 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Podemos, portanto, supor que a soma de $\aleph_0$ pares deve ter $\aleph_0$ termos. Mas, conquanto possamos provar que isso por vezes se verifique, não pode ser provado que aconteça *sempre*, a menos que admitamos o axioma multiplicativo. Isso é ilustrado pelo caso do milionário que comprava um par de meias sempre que comprava um par de botas, e nunca em qualquer outra ocasião, e que tinha tal paixão por comprar ambas que no fim tinha $\aleph_0$ pares de botas e $\aleph_0$ pares de meias. O problema é: Quantas botas e quantas meias tinha ele? Supor-se-ia, naturalmente, que ele teria um número de pés de botas e um número de pés de meias iguais ao dobro dos números de pares de cada um, e que, portanto, teria $\aleph_0$ de cada, porquanto esse número não é aumentado pela elevação do dobro. Mas aí está uma instância de dificuldade, já observada, de conectar a soma de ν classes, cada uma com μ termos, com $\mu \times \nu$. Isso pode, por vezes, ser feito; por vezes, não. No nosso caso, pode ser feito com as botas, mas não com as meias, exceto por algum dispositivo muito artificial. Eis a razão para a diferença: Entre as botas podemos distinguir esquerda e direita, e, portanto, podemos fazer uma seleção de cada par, a saber, podemos escolher todos os pés esquerdos ou todos os pés direitos; mas, no tocante às meias, tal princípio de seleção não se impõe e não podemos estar certos, a não ser admitindo o axioma multiplicativo, da existência de qualquer classe consistindo de um pé de meia e de cada par. Daí o problema.

Podemos situar a questão de outra maneira. Para provar que uma classe tem $\aleph_0$ termos, é necessário e suficiente encontrar algum modo de arranjar seus termos em uma progressão. Não há dificuldade alguma em fazer isso com as botas. Os *pares* são dados como formando um $\aleph_0$, e, portanto, como o campo de uma progressão. Tomemos primeiro o pé esquerdo

e depois o pé direito de cada par de botas, mantendo a ordem do par inalterada; obtemos, dessa maneira, uma progressão de todas as botas. Mas no tocante às meias teremos de escolher arbitrariamente, em cada par, qual pé separar primeiro; e um número infinito de escolhas arbitrárias é uma impossibilidade. A menos que possamos encontrar uma *regra* para selecionar, isto é, uma relação que seja uma seletora, não saberemos se uma seleção é sequer teoricamente possível. Naturalmente, no caso de objetos no espaço, como as meias, sempre podemos encontrar um princípio de seleção. Por exemplo, tomemos os centros de massa das meias: haverá pontos p no espaço tais que, em cada par, os centros de massa dos dois pés não estarão ambos exatamente à mesma distância de p ; assim, podemos escolher, de cada par, o pé de meia que tem o seu centro de massa mais próximo de p . Mas não há razão teórica alguma para que um método de seleção como esse seja sempre possível, e o caso das meias poderá servir, com um pouco de boa vontade de parte do leitor, para mostrar como uma seleção é impossível.

Cabe observar que se *fosse* impossível selecionar um pé de cada par de meias, seguir-se-ia que as meias não *poderiam* ser arranjadas em uma progressão, e, portanto, que não haveria $\aleph_0$ delas. Esse caso mostra que, se μ é um número infinito, um conjunto de μ pares não pode conter o mesmo número de termos que outro conjunto de μ pares; pois, dados $\aleph_0$ pares de botas, há certamente $\aleph_0$ botas, mas não podemos estar certos disso no caso das meias, a menos que admitamos o axioma multiplicativo, ou recorramos a algum método geométrico fortuito de seleção como o que ficou acima ilustrado.

Outro problema importante envolvendo o axioma multiplicativo é a relação entre flexibilidade e não-indutividade. Devemos estar lembrados de que mostramos no capítulo VIII que um número reflexivo deve ser não-indutivo, mas que o inverso (que se saiba no presente) só pode ser provado se admitirmos o axioma multiplicativo. É a seguinte a maneira em que a coisa se desenrola:

É fácil provar que uma classe reflexiva é uma classe que contém subclasses com $\aleph_0$ termos. (Naturalmente, a classe poderá ter, ela própria, $\aleph_0$ termos.) Assim, teremos de provar, se pudermos, que, dada qualquer classe não-indutiva, é possível escolher uma progressão de seus termos. Acontece que não há dificuldade alguma em mostrar que uma classe não-indutiva deve conter mais termos do que qualquer classe indutiva, ou,

o que vem a ser o mesmo, que, se α é uma classe não-indutiva e v é um número indutivo qualquer, há subclasses de α que têm v termos. Podemos formar, assim, conjuntos de subclasses finitas de α : Primeiro, uma classe sem termo algum, depois classes com 1 termo (tantas quantos são os membros de α), depois classes com 2 termos, e assim por diante. Obtemos desse modo uma progressão de conjuntos de subclasses, consistindo cada um de todas as que têm um certo dado número finito de termos. Até então não usamos o axioma multiplicativo, tendo apenas provado que o número de coleções de subclasses de α é um número reflexivo, isto é, que, se μ é o número de membros de α , de modo que 2^μ é o número de subclasses de α , e 2^{2^μ} é o número de coleções de subclasses, então, desde que μ seja não-indutivo, 2^{2^μ} deverá ser reflexivo. Mas isso está muito distanciado do que nos propusemos a provar.

Para irmos mais além desse ponto, devemos empregar o axioma multiplicativo. Escolhamos um de cada conjunto de subclasse, omitindo a subclasse que consiste somente da classe vazia. Equivale a dizer, selecionamos uma subclasse contendo, digamos, um termo, α_1 ; uma, contendo dois termos, α_2 , digamos; uma contendo três termos, digamos, α_3 , e assim por diante. (Podemos fazê-lo se admitirmos o axioma multiplicativo; de outro modo, não sabemos se podemos ou não fazê-lo.) Temos agora uma progressão $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ de subclasses de α ; chegamos, assim, um passo mais perto de nossa meta. Sabemos agora que, admitindo o axioma multiplicativo, se μ for um número não-indutivo, 2^μ deve ser um número reflexivo.

O próximo passo consiste em observar que, embora não possamos estar certos de que novos membros de α surgirão em qualquer estágio especificado da progressão $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, podemos estar seguros de que novos membros surgirão de tempos a tempos. Ilustremos. A classe α_1 , que consiste de um termo, é um novo começo; representemos esse termo por x_1 . A classe α_2 , consistindo de dois termos, poderá ou não conter x_1 ; se o contiver, introduzirá um novo termo; caso contrário, deverá introduzir dois termos novos, digamos x_2 e x_3 . Neste caso, é possível que α_3 consista de x_1, x_2, x_3 e, assim, não introduza termo novo algum, mas, nesse caso, α_4 deverá introduzir um novo termo. As primeiras v classes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v$

contêm, no máximo, $1+2+3+\dots+v$ termos, isto é, $v(v+1)/2$ termos; assim, seria possível, se não houvesse repetição alguma nas primeiras v classes, prosseguir verificando-se repetições desde a classe número $(v+1)^o$ até à classe $v(v+1)/2^o$. Mas então os velhos termos não mais seriam suficientemente numerosos para formar uma classe seguinte com o número correto de membros, isto é, $v(v+1)/2+1$, e, portanto, deverão entrar novos termos a essa altura, se não mesmo antes. Segue-se que, se omitirmos de nossa progressão $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ todas as classes compostas inteiramente de membros que tenham ocorrido em classes anteriores, teremos ainda assim, uma progressão. Seja a nossa nova progressão chamada $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ (Teremos $\alpha_1=\beta_1$ e $\alpha_2=\beta_2$ porque α_1 e α_2 *devem* introduzir novos termos. Poderemos ou não ter $\alpha_3=\beta_3$, mas, de modo geral, β_μ será α_ν , em que ν é algum número maior do que μ ; isto é, os β são *alguns* dos α .) Mas esses β são tais que qualquer um deles, digamos β_μ contém membros que não ocorreram em qualquer dos β anteriores. Seja γ_μ a parte de β_μ que consiste de membros novos. Obtemos assim uma nova progressão $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ (Novamente, γ_1 será idêntico a β_1 e a α_1 ; se α_2 não contiver o único membro de α_1 , teremos $\gamma_2=\beta_2=\alpha_2$, mas se α_2 contiver esse único membro, γ_2 consistirá do outro membro de α_2 .) Esta nova progressão de γ consiste de classes mutuamente exclusivas. Portanto, uma seleção destas será uma progressão; isto é, se x_1 é o membro de γ_1 , x_2 é o membro de γ_2 , x_3 é o membro de γ_3 , e assim por diante; então $x_1, x_2, x_3, \dots$ é uma progressão e é uma classe de α . Admitindo o axioma multiplicativo, tal seleção pode ser feita. Dessa forma, usando duas vezes o axioma multiplicativo podemos provar que, se o axioma é verdadeiro, todo cardinal não-indutivo deve ser reflexivo. Isso também poderia ser deduzido do teorema de Zermelo, de que, se o axioma é verdadeiro, toda classe pode ser bem ordenada; pois uma série bem ordenada tem de ter um número finito ou um número reflexivo de termos em seu campo.

Há uma vantagem no argumento direto acima, em comparação com a dedução do teorema de Zermelo, pelo fato de aquele argumento não exigir a verdade universal do axioma multiplicativo, mas apenas a sua verdade quando aplicado a um conjunto de $\aleph_0$ classes. Pode acontecer que o axioma se verifique para $\aleph_0$ classes, embora não para números maiores de classes. Por essa razão é melhor, quando possível, contentar-nos com a suposição mais restrita. A suposição feita no

argumento direto acima é a que um produto de $\aleph_0$ fatores nunca é zero, a menos que um dos fatores seja zero. Podemos enunciar a suposição da seguinte forma: " $\aleph_0$ é um número *multiplicável*", sendo um número ν definido como "*multiplicável*" quando um produto de ν fatores nunca é zero, a menos que um dos fatores seja zero. Podemos *provar* que um número *finito* é sempre multiplicável, mas não podemos provar o mesmo em relação a qualquer número infinito. O axioma multiplicativo é equivalente à suposição de que *todos* os números cardinais são multiplicáveis. Mas, para identificar o reflexivo com o não-indutivo, ou para tratar do problema das botas e das meias, ou para mostrar que qualquer progressão de números de segunda classe é da segunda classe, necessitamos apenas da suposição muitíssimo menor de que $\aleph_0$ é multiplicável.

Não é improvável que haja muito por ser descoberto com relação aos tópicos discutidos neste capítulo. Poderão ser encontrados casos em que as proposições que parecem envolver o axioma multiplicativo podem ser provadas sem ele. É concebível poder-se mostrar ser falso o axioma multiplicativo em sua forma geral. Sob esse ponto de vista, o teorema de Zermelo oferece melhores esperanças: *talvez se possa* provar que as séries contínuas ou algumas ainda mais densas são incapazes de ter seus termos bem ordenados, o que provaria a falsidade do axioma multiplicativo, em virtude do teorema de Zermelo. Mas não foi descoberto até agora método algum de obter tais resultados, e o assunto permanece envolto em obscuridade.

CAPÍTULO XIII

O axioma da infinidade
e os tipos lógicos

○ AXIOMA DA INFINIDADE é uma suposição que pode ser assim enunciada:

"Se n for um número cardinal indutivo qualquer, haverá pelo menos uma classe de indivíduos com n termos."

Se essa suposição for verdadeira, seguir-se-á, naturalmente, que há muitas classes de indivíduos com n termos e que o número total de indivíduos do mundo não é um número indutivo. Pois, segundo o axioma, há pelo menos uma classe com $n+1$ termos, do que se segue que há muitas classes de n termos e que n não é o número de indivíduos no mundo. Como n é *qualquer* número indutivo, segue-se que o número de indivíduos no mundo deve (se o axioma for verdadeiro) exceder qualquer número indutivo. Em vista do que encontramos, no capítulo precedente, sobre a possibilidade de cardinais que não são indutivos nem reflexivos, não podemos inferir, de nosso axioma, a existência de pelo menos $\aleph_0$ indivíduos, a menos que admitamos o axioma multiplicativo. Mas sabemos que há pelo menos $\aleph_0$ classes de classes, porquanto os cardinais indutivos são classes de classes e formam uma progressão se o nosso axioma é verdadeiro. A maneira pela qual urge a necessidade deste axioma pode ser assim explicada: Uma das posições de Peano é a de que dois cardinais indutivos não têm o mesmo sucessor, isto é, que não devemos ter $m+1=n+1$, a menos que $m=n$, se m e n são cardinais indutivos. Tivemos, no capítulo VIII, a oportunidade de usar o que é virtualmente o mesmo que a suposição de Peano, acima, a saber, a de que, se n é cardinal indutivo, n não é igual a $n+1$. Poder-se-á pensar que isso possa ser provado. Podemos provar que, se α é uma classe indutiva e n é o número de membros de α , então n não é igual a $n+1$.

Essa proposição é facilmente provada por indução, podendo pensar-se que implique a outra. Mas de fato isso não se dá, porquanto poderá não existir classe alguma como α . O que está implícito é o seguinte: Se n é um cardinal indutivo tal que há pelo menos uma classe com n membros, então n não é igual a $n+1$. O axioma de infinidade nos assegura (seja verdadeira ou falsamente) que há classes com n membros, permitindo-nos, assim, asserir que n não é igual a $n+1$. Mas sem esse axioma seríamos deixados com a possibilidade de que n e $n+1$ fossem, ambos, a classe vazia.

Ilustremos essa possibilidade com um exemplo: Suponhamos que existissem exatamente nove indivíduos no mundo. (Quanto ao que signifique a palavra "indivíduo", devo pedir ao leitor que seja paciente.) Então, os cardinais indutivos de 0 a 9 seriam como esperamos que sejam, mas 10 (definido como $9+1$) seria a classe vazia. Cabe lembrar que $n+1$ pode ser definido como se segue: $n+1$ é a coleção de todas as classes que têm um termo x tal que, quando x é retirado, permanece uma classe de n termos. Aplicando agora essa definição, vemos que, no caso suposto, $9+1$ é uma classe consistindo de nenhuma classe, isto é, é a classe vazia. O mesmo será verdadeiro para $9+2$ ou, de modo geral, para $9+n$, a menos que n seja zero. Assim, 10 e todos os cardinais indutivos subseqüentes serão idênticos, porquanto serão todos a classe vazia. Em tal caso, os cardinais indutivos não formarão uma progressão, nem tampouco será verdadeiro que dois cardinais indutivos tenham o mesmo sucessor, porquanto 9 e 10 serão, ambos, sucedidos pela classe vazia (sendo 10, ele próprio, a classe vazia.) É para impedir tais catástrofes aritméticas que necessitamos do axioma da infinidade.

Realmente, enquanto nos contentarmos com a aritmética dos inteiros finitos, não introduzindo nem os inteiros infinitos, nem as classes infinitas, nem a série de inteiros finitos ou de razões, ser-nos-á possível obter todos os resultados desejados sem o axioma da infinidade. Equivale a dizer, podemos lidar com a adição, a multiplicação e a exponenciação dos inteiros finitos e de razões, mas não podemos lidar com inteiros infinitos ou irracionais. Assim, a teoria do transfinito e a teoria dos números reais nos falham. Deve ser agora explicado como surgem esses resultados.

Admitindo que o número de indivíduos no mundo seja n , o número de classes de indivíduos será 2^n . Isso, em virtude

da proposição geral mencionada no capítulo VIII, de que o número de classes contidas em uma classe que tem n membros é 2^n . Acontece que 2^n é sempre maior do que n . Portanto, o número de classes no mundo é maior do que o número de indivíduos. Se supusermos, agora, que o número de indivíduos seja 9, como fizemos há pouco, o número de classes será 2^9 , isto é, 512. Assim, se aplicamos os nossos números à contagem de classes em vez de à contagem de indivíduos, a nossa aritmética será normal até atingirmos 512: o primeiro número a ser nulo será 513. E, se avançarmos até às classes de classes, sair-nos-emos ainda melhor: o número delas será 2^{512} , número que é tão grande que chega a atordoar a imaginação, porquanto tem cerca de 153 algarismos. E, se avançarmos ainda mais até às classes de classes de classes, obteremos um número representado por 2 elevado a uma potência que tem cerca de 153 algarismos; o número de algarismos desse número será igual a aproximadamente três vezes 10^{152} . Em uma época de escassez de papel é indesejável escrevermos esse número por extenso, e, se quisermos outros ainda maiores, podemos obtê-los caminhando mais ao longo da hierarquia lógica. Dessa maneira, poder-se-á fazer com que qualquer cardinal indutivo encontre o seu lugar entre os números que não são nulos, meramente caminhando uma distância suficiente ao longo dessa hierarquia.*

No tocante às razões, temos um estado de coisas muito semelhante. Para que uma razão μ/v tenha as propriedades esperadas, deve haver suficientes objetos contados, seja de que gênero for, para garantir que a classe vazia não se imponha inoportunamente. Mas isso pode ser garantido, para qualquer razão μ/v dada, sem o axioma da infinidade, meramente caminhando-se uma distância suficiente ao longo da hierarquia. Se não pudermos ter êxito contando indivíduos, podemos tentar contar as classes de indivíduos; se ainda assim não formos bem sucedidos, podemos tentar contar as classes de classes, e assim por diante. Finalmente, por poucos que sejam os indivíduos no mundo, atingiremos um ponto em que haverá mais do que μ objetos, seja μ qual número indutivo for. Mesmo que não houvesse indivíduo algum, isso ainda seria verdadeiro, pois existiria uma classe, a saber, a classe vazia, 2 classes de classes

(a saber, a classe vazia de classes e a classe cujo único membro é a classe vazia de indivíduos), 4 classes de classes de classes, 16 na etapa seguinte, 65.536 na outra seguinte, e assim por diante. Assim, não é necessário uma suposição como o axioma da infinidade para se chegar a qualquer razão dada ou a qualquer cardinal indutivo dado.

É quando desejamos lidar com toda a classe ou série de cardinais indutivos ou de razões que se faz necessário o axioma. Necessitamos de toda a classe de cardinais indutivos para estabelecer a existência de progressões; para tais resultados, seremos capazes de formar uma única classe ou série na qual nenhum cardinal indutivo é nulo. Necessitamos de toda a série de razões em ordem de grandeza para definir os números reais como segmentos: essa definição não dará os resultados desejados, a não ser que a série de razões seja compacta, o que ela não poderá ser se o número total de razões, na etapa considerada, for finito.

Seria natural supor-se — como eu próprio supus em tempos idos — que o axioma da infinidade pudesse ser *provado* por meio de construções como as que vimos considerando. Pode dizer-se: Admitamos que o número de indivíduos seja n , podendo n ser 0 sem prejudicar o nosso argumento; então, se formosmos o conjunto completo de indivíduos, classes, classes de classes, etc., todos tomados conjuntamente, o número de termos em nosso conjunto inteiro será

$$n + 2^n + 2^{2^n} \dots \text{ad inf.},$$

que é $\aleph_0$. Assim, tomando todos os objetos juntos e não nos limitando a objetos de determinado tipo, obteremos, certamente, uma classe infinita, não necessitando, portanto, do axioma da infinidade. É o que se pode dizer.

Mas, antes de tratarmos desse argumento, a primeira coisa a observar é que há um ar de prestidigitação em torno dele: lembra por vezes o mágico a tirar coisas de dentro do chapéu. Aquele que lhe tenha emprestado o chapéu está bem certo de que não havia um coelho vivo dentro do mesmo, mas fica em apuros para dizer que o coelho foi lá colocado. Assim, o leitor, caso tenha vigoroso senso de realidade, sentir-se-á convencido da impossibilidade de se produzir uma coleção infinita com uma coleção de indivíduos, embora esteja incapacitado para dizer onde está a falha na construção acima. Seria um erro exagerar

* Sobre esse assunto ver *Principia Mathematica*, vol. II. * 120 ss. Sobre o problema correspondente relativo às razões, ver *ibid.*, vol. III.

* 303 ss.

demasiadamente tais sentimentos de prestidigitação; à semelhança de outras emoções, poderão nos extraviar. Mas nos dão uma base *prima facie* para pesquisar muito de perto qualquer argumento que as provoque. Sou de opinião que, quando o argumento acima for esmiuçado, provará ser falso, embora a falácia seja sutil e de modo algum fácil de ser consistentemente evitada.

A falsidade envolvida é a falácia que pode ser chamada "confusão de tipos". A explicação completa do assunto "tipos" exigiria um volume inteiro; mais ainda, o propósito deste livro é evitar as partes do assunto em geral que ainda sejam obscuras e controversas, isolando, para conveniência dos principiantes, as partes que podem ser aceitas como corporificando verdades matematicamente estabelecidas. E a teoria dos tipos, deve-se acentuar, não pertence à parte acabada e certa de nosso assunto: muito dessa teoria é ainda incipiente, confuso e obscuro. Mas a necessidade de alguma doutrina de tipos é menos duvidosa do que a forma precisa que a doutrina deva assumir; e, em conexão com o axioma da infinidade, é especialmente fácil ver a necessidade de alguma doutrina como essa.

Essa necessidade resulta, por exemplo, da "contradição do maior cardinal". Vimos, no capítulo VIII, que o número de classes contidas em uma determinada classe é sempre maior do que o número de membros da classe, e deduzimos não existir um número cardinal maior de todos. Mas se pudéssemos, como sugerimos há pouco, fazer a soma total de indivíduos, classes de indivíduos, classes de classes de indivíduos, etc., obteríamos uma classe da qual suas próprias subclasses seriam membros. A classe consistindo de todos os objetos que podem ser contados, sejam eles de que gênero forem, deve, caso exista essa classe, ter um número cardinal que seja a maior possível. Desde que todas as suas subclasses serão seus membros, não poderá haver um número destas superior ao número de membros. Chegamos, assim, a uma contradição.

Quando deparei pela primeira vez com essa contradição, no ano de 1901, tentei descobrir alguma falha na prova de Cantor de que não há um cardinal maior de todos, por nós apresentada no capítulo VIII. Aplicando essa prova à suposta classe de todos os objetos imagináveis, fui levado a uma contradição nova e mais simples, a saber:

A classe compreensiva por nós considerada, que deve abranger tudo, deve abranger a si mesma como um de seus membros.

Em outras palavras, se há tal coisa chamada "tudo", então tudo é alguma coisa e é um membro da classe do "tudo". Mas normalmente uma classe não é membro de si mesma. A humanidade, por exemplo, não é um homem. Forme-se agora a reunião de todas as classes que não são membros de si mesmas. Essa reunião é uma classe: será ou não um membro de si mesma? Se o for, será uma daquelas classes que não são membros de si mesmas, isto é, não é membro de si mesma. Se não o for, não será uma daquelas classes que não são membros de si mesmas, isto é, ela é um membro de si mesma. Assim, das duas hipóteses — a de que seja e a de que não seja um membro de si mesma — cada uma implica sua contraditória. Isso é uma contradição.

Não há dificuldade em elaborar contradições similares *ad lib*. A solução de tais contradições pela teoria dos tipos é apresentada por inteiro em *Principia Mathematica** e também, mais resumidamente, em artigos deste autor no *American Journal of Mathematics*,** bem como na *Revue de Metaphysique et de Morale****. Para o momento, deve bastar um esboço da solução.

A falácia consiste na formação do que chamamos classes "impuras", isto é, classes que não são puras quanto ao "tipo". Como veremos em capítulo posterior, as classes são ficções lógicas, e um enunciado que pareça referir-se acerca de uma classe só será significativo se for capas de tradução para uma forma na qual não seja feita menção alguma à classe. Isso impõe uma limitação às maneiras em que possam ocorrer significativamente as coisas que são, *nominal mas não realmente*, os nomes das classes: uma sentença ou um conjunto de símbolos que em tais pseudonomes ocorrem de maneiras errôneas não são falsos, mas estritamente carentes de significado. A suposição de que uma classe é, ou de que não é, um membro de si mesma é destituída de sentido justamente dessa maneira. E, com mais generalidade, supor-se que uma classe de indivíduos seja um membro, ou que não seja um membro, de outra classe de indivíduos será fazer-se uma suposição sem sentido; e construir-se simbolicamente qualquer classe cujos membros não são todos

* Vol. I, Introdução, cap. II, * 12 e * 20; vol. II. Declaração Preliminar.

** "Mathematical Logic as based on the Theory of Types", vol. XXX, 1908, pp. 222-262.

*** "Les paradoxes de la logique", 1906, pp. 627-650.

do mesmo grau na hierarquia lógica é usar-se símbolos de um modo que faz com que não mais simbolizem coisa alguma.

Assim, se há n indivíduos no mundo e 2^n classes de indivíduos, não podemos formar uma nova classe consistindo tanto de indivíduos como de classes, tendo $n+2^n$ membros. Dessa maneira, desmorona a tentativa de escapar ao axioma da infinidade. Não pretendo ter explicado a doutrina dos tipos ou ter feito mais do que indicar, em traços largos, o porquê da necessidade de tal doutrina. Visei apenas a dizer somente o que fosse necessário para mostrar que não podemos *provar* a existência de números e classes infinitos por tais métodos de prestidigitador como os que examinamos. Restam, contudo, certos outros métodos possíveis que devem ser considerados.

Vários argumentos declarando provar a existência de classes infinitas são apresentados em *Principles of Mathematics*, parágr. 339 (p. 357). Já tratamos desses argumentos no quanto assumem que, se n é um cardinal indutivo, n não é igual a $n+1$. Há um argumento, sugerido em uma passagem do *Parmênides*, de Platão, segundo o qual, se existe um número tal que 1, então 1 tem ser; mas 1 não é idêntico ao ser, e, portanto, 1 e o ser são dois, e, portanto, existe um número tal que 2; mas 2 junto com 1 e com o ser dão uma classe de três termos, e assim por diante. Esse argumento é falacioso, em parte porque "ser" não é um termo que tenha qualquer significado definido, e, ainda mais, porque, se fosse inventado um significado definido para ele, constatar-se-ia que os números não têm ser — são, na verdade, o que se chama "ficções lógicas", como veremos quando considerarmos a definição de classes.

O argumento de que o número de números de 0 a n (ambos incluídos) é $n+1$ depende da suposição de que até n e incluindo n nenhum número é igual ao seu sucessor, o que, como vimos, não será sempre verdadeiro se o axioma da infinidade for falso. Deve ficar entendido que a equação $n=n+1$, que pode ser verdadeira para um n finito se n exceder o número total de indivíduos no mundo, é bem diferente da mesma equação quando aplicada a um número reflexivo. Quando aplicada a um número reflexivo, ela significa que, dada uma classe de n termos, essa classe é "similar" àquela obtida pela adição de mais outro termo. Mas quando aplicada a um número demasiadamente grande para o mundo real, ela meramente significa não haver classe alguma de n indivíduos e classe alguma de $n+1$ indivíduos; não significa que se percorreremos suficientemente a

hierarquia dos tipos para garantir a existência de uma classe de n termos, constataremos então ser essa classe "similar" a uma de $n+1$ termos, porque, se n for indutivo, este não será o caso, independentemente da verdade ou falsidade do axioma da infinidade.

Há um argumento empregado tanto por Bolzano* como por Dedekind** para provar a existência de classes reflexivas. É o seguinte, em resumo, o argumento: Um objeto não é idêntico à idéia do objeto, mas há (pelo menos no reino da existência) uma idéia de qualquer objeto. A relação entre um objeto e a idéia que se tenha dele é de um-para-um e as idéias são apenas algumas entre os objetos. Portanto, a relação "idéia de" constitui uma reflexão de toda a classe de objetos em uma parte de si mesma, a saber, na parte que consiste de idéias. Consequentemente, a classe de objetos e a classe de idéias são, ambas, infinitas. Esse argumento é interessante, não apenas por si, mas também porque os erros nele contidos (ou o que considero erros) são de uma espécie que é instrutivo notar. O principal erro consiste em admitir que haja uma idéia de cada objeto. É, naturalmente, excessivamente difícil decidir-se o que se quer dizer por "idéia"; mas admitamos que o saibamos. Devemos, então, supor que, começando (digamos) com Sócrates, haja a idéia de Sócrates, e assim por diante, *ad infinitum*. Mas está claro que este não é o caso no sentido de todas essas idéias terem existência empírica real na mente das pessoas. Depois da terceira ou quarta etapas, elas se tornam míticas. Para que o argumento possa ser sustentado, as pretendidas "idéias" devem ser idéias platônicas situadas no céu, porquanto elas certamente não se encontram na Terra. Mas então torna-se logo duvidoso que existam tais idéias. Para que possamos saber que existem, devemos basear-nos em alguma teoria lógica, provando ser necessário a uma coisa que haja uma idéia nela. Certamente não podemos obter esse resultado empiricamente, ou aplicá-lo, como o faz Dedekind, ao "*meine Gedankenwelt*" — o mundo dos meus pensamentos.

Se estivéssemos interessados em examinar plenamente a relação entre idéia e objeto teríamos de entrar em várias indagações psicológicas e lógicas que não são relevantes ao nosso principal propósito. Mas alguns outros pontos adicionais devem

* BOLZANO, *Paradoxien des Unendlichen*, 13.

** DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?* N.º 66.

ser notados. Para que "idéia" possa ser psicologicamente entendida, poderá ser *idêntica* ao objeto ou poderá indicar uma *descrição* (em sentido que será explicado em capítulo subsequente). No primeiro caso, o argumento falha, porque foi essencial à prova da reflexibilidade que objeto e idéia fossem distintos. No segundo caso, o argumento também falha, porque a relação entre objeto e descrição não é de um-para-um: há inúmeras descrições corretas de qualquer objeto dado. Sócrates (*e.g.*) pode ser descrito como "o mestre de Platão" ou como "o filósofo que tomou cicuta" ou como "o marido de Xantipa". Se — considerando as hipóteses restantes — "idéia" deve ser psicologicamente interpretada, deve ser mantido que não há entidade psicológica definida alguma que possa ser chamada a idéia do objeto no sentido em que podemos dizer "minha idéia de Sócrates é bem diferente da sua", mas não há entidade central alguma (exceto o próprio Sócrates) a ligar todas as "idéias de Sócrates", não havendo, portanto, uma relação de um-para-um entre idéia e objeto, como é suposto pelo argumento. Naturalmente, nem é tampouco psicologicamente verdadeiro, como já vimos, que haja idéias (por mais extenso que seja o sentido) de mais do que uma diminuta proporção das coisas do mundo. Por todas essas razões o argumento acima em favor da existência lógica das classes reflexivas deve ser rejeitado.

Poder-se-á pensar que, diga-se o que se disser em favor dos argumentos *lógicos*, os argumentos *empíricos* deriváveis do espaço e do tempo, a diversidade de cores, etc., são assaz suficientes para provar a existência real de um número infinito de particulares. Não creio nisso. Não temos razão alguma, a não ser o preconceito, para acreditar na extensão infinita do espaço e do tempo, pelo menos no sentido em que espaço e tempo são fatos físicos e não ficções matemáticas. Naturalmente consideramos o espaço e o tempo contínuos, ou, pelo menos, compactos: mas isso é também principalmente um preconceito. A teoria dos "quanta", da Física, seja falsa ou verdadeira, ilustra o fato de a Física jamais poder ter a prova da continuidade, embora talvez, bem possivelmente, tenha uma prova em contrário. Os sentidos não são suficientemente exatos para distinguir entre movimento contínuo e sucessão discreta rápida, como qualquer um poderá descobrir em um cinema. Um mundo no qual todo movimento consiste de uma série de pequenas sacudidelas finitas seria empiricamente indistinguível de outro no qual o movimento fosse contínuo. A defesa adequada dessas teses tomaria muito espaço; no momento, eu as estou meramente sugerindo

para consideração do leitor. Se são válidas, segue-se que não há razão empírica alguma para se acreditar que o número de particulares no mundo seja infinito e segue-se também que jamais poderá haver tal razão; segue-se ainda que não há no presente razão empírica alguma para se acreditar seja aquele número finito, embora seja teoreticamente concebível que algum dia possa haver, conquanto não conclusivamente.

Do fato de o infinito não ser autocontraditório, mas também não logicamente demonstrável, devemos concluir que nada se pode saber *a priori* quanto a ser o número de coisas no mundo finito ou infinito. A conclusão é, portanto, adotando uma fraseologia leibniziana, que alguns dos mundos possíveis são finitos, alguns infinitos, e não temos meios de saber a qual dessas duas espécies pertence realmente o nosso mundo real. O axioma da infinidade será verdadeiro em alguns dos mundos possíveis e falso em outros; não podemos dizer se é ou não verdadeiro neste mundo.

Em todo este capítulo, os sinônimos "indivíduo" e "particular" foram usados sem explicação. Seria impossível explicá-los adequadamente sem uma dissertação mais longa sobre a teoria dos tipos do que seria próprio no presente trabalho, mas algumas palavras antes de deixarmos este tópico poderão contribuir um pouco para diminuir a obscuridade que de outro modo envolveria o significado dessas palavras.

Em um enunciado corrente, podemos distinguir um verbo, expressando um atributo ou relação, dos substantivos que expressam o sujeito do atributo ou os termos da relação. "César vivia" imputa um atributo a César; "Bruto matou César" expressa uma relação entre Bruto e César. Usando a palavra "sujeito" em um sentido generalizado, podemos chamar ambos Bruto e César sujeitos dessa proposição: o fato de Bruto ser gramaticalmente o sujeito e César o objeto é logicamente irrelevante, porquanto a mesma ocorrência pode ser expressa nas palavras "César foi morto por Bruto", em que César é o sujeito gramatical. Teremos, assim, em um gênero mais simples de proposição, um atributo ou relação entre um, dois ou mais "sujeitos" no sentido amplo. (Uma relação pode ter mais de dois termos: *e.g.*, "A dá B a C" é uma relação entre *três* termos.) Mas acontece freqüentemente que, em exame mais acurado, constata-se que os sujeitos aparentes não são realmente sujeitos, mas são capazes de análise; o único resultado disso é, contudo, que novos sujeitos tomam o seu lugar. Também acontece que

o verbo pode ser, gramaticalmente, tornado o sujeito: *e.g.*, podemos dizer que "matar é uma relação que se estabelece entre Bruto e César". Mas em tais casos a gramática é enganosa, e em um enunciado direto, seguindo as regras que devem guiar a gramática filosófica, Bruto e César aparecerão como os sujeitos e matar como o verbo.

Somos assim levados à concepção de termos que, quando ocorrem em proposições, podem *somente* ocorrer como sujeitos e nunca de qualquer outra maneira. Isso é parte da velha definição escolástica de *substância*; mas a persistência através dos tempos, que pertenceu àquela noção, não forma parte alguma da noção em que estamos interessados. Definiremos "nomes próprios" como sendo os termos que só podem ocorrer como *sujeitos* em proposições (usando "sujeito" no sentido ampliado há pouco explicado). Definiremos ainda "indivíduos" ou "particulares" como os objetos que podem ser nomeados por nomes próprios. (Seria melhor defini-los diretamente, e não por meio da espécie de símbolos pelos quais são simbolizados; mas para fazê-lo teríamos de mergulhar mais fundo em metafísica do que é aqui desejável.) É, naturalmente, possível que haja uma regressão interminável: que, o que pareça um particular, seja realmente, a um estudo acurado, alguma classe, ou uma espécie de complexo. Se este for o caso, o axioma da infinidade deve, sem dúvida, ser verdadeiro. Mas se não for o caso, deve ser teoreticamente possível à análise atingir objetos últimos, e são estes que dão o significado de particulares ou indivíduos. É ao número destes que se admite aplicar o axioma da infinidade. Se for verdadeiro no tocante a eles, sê-lo-á no tocante a classe deles, a classes de classes deles, e assim por diante, da mesma forma, se for falso no tocante a eles, sê-lo-á através de toda essa hierarquia. Portanto, é natural enunciar-se o axioma relativamente a eles do que a qualquer estágio da hierarquia. Mas parece não haver método algum para se saber se o axioma é verdadeiro ou falso.

CAPÍTULO XIV

Incompatibilidade e teoria da dedução

JÁ EXPLORAMOS, É BEM VERDADE que algo apressadamente, a parte da Filosofia Matemática que não exige um exame crítico da idéia de classe. Contudo, nós nos defrontamos, no capítulo precedente, com problemas que tornam imperativo tal exame. Antes de empreendê-lo, devemos considerar certas outras partes da Filosofia Matemática que até então ignoramos. Em um tratamento sintético, as partes pelas quais nos interessaremos agora vêm primeiro: são mais fundamentais do que qualquer coisa que discutimos até agora. Três tópicos nos preocuparão antes de atingirmos a teoria das classes, a saber: 1) a teoria da dedução, 2) funções proposicionais, 3) descrições. Destas, a terceira não está logicamente pressuposta na teoria das classes, mas é um exemplo mais simples da *espécie* de teoria que é necessária para se lidar com classes. É o primeiro tópico, a teoria da dedução, que nos ocupará no presente capítulo.

A Matemática é uma ciência dedutiva: partindo de certas premissas, chega, por um estrito processo de dedução, aos vários teoremas que a constituem. É verdade que, no passado, as deduções matemáticas eram com freqüência muito destituídas de rigor; é também verdade que o rigor é um ideal dificilmente alcançável. Não obstante, se faltar rigor em uma prova matemática, ela será, sob esse aspecto, defeituosa; não constitui defesa a alegação de que o senso comum mostra ser o resultado correto, porquanto, se tivéssemos de confiar nisso, melhor seria abandonar completamente o argumento do que trazer a falácia em socorro do senso comum. Nenhum apelo ao senso comum, ou "intuição" ou qualquer outra coisa que não a estrita lógica dedutiva, deve ser necessário à Matemática após estabelecidas as premissas.

Kant, tendo observado que os geômetras de sua época não podiam provar seus teoremas somente por meio do argumento, tendo de apelar para a figura, inventou uma teoria do raciocínio matemático segundo a qual a inferência nunca é estritamente lógica, exigindo sempre o apoio do que é chamado "intuição". Toda a tendência da Matemática moderna, com sua crescente exigência de rigor, tem sido contrária a essa teoria kantiana. As coisas da Matemática dos dias de Kant que não podem ser *provadas* não podem ser *conhecidas* — por exemplo, o axioma das paralelas. O que se pode conhecer, em Matemática, e por métodos matemáticos, é o que pode ser deduzido da Lógica pura. Qualquer outra coisa que deva pertencer ao conhecimento humano deve ser apurado de outro modo — empiricamente, através dos sentidos ou através da experiência sob alguma forma, mas não *a priori*. As bases positivas dessa tese são encontradas em *Principia Mathematica, passim*; uma defesa controversa da mesma é feita em *Principles of Mathematics*. Nada mais podemos fazer, aqui, do que indicar aqueles trabalhos ao leitor, porquanto o assunto é por demais vasto para um tratamento apressado. Entrementes, admitiremos que toda a Matemática seja dedutiva, passando a investigar o que está envolvido na dedução.

Na dedução, temos uma ou mais proposições chamadas *premissas*, a partir das quais inferimos uma proposição chamada *conclusão*. Para os nossos propósitos, será conveniente, quando haja originalmente várias premissas, fundi-las em uma única proposição, para que possamos falar de *a* premissa e de *a* conclusão. Assim, podemos considerar a dedução como um processo pelo qual passamos do conhecimento de certa proposição, a premissa, para o conhecimento de uma certa outra proposição, a conclusão. Mas não devemos considerar tal processo uma dedução *lógica*, a menos que ela seja *correta*, isto é, a menos que haja tal relação entre premissa e conclusão que tenhamos o direito de acreditar na conclusão se soubermos ser a premissa verdadeira. É essa relação o que constitui o interesse principal na teoria lógica da dedução.

Para que possamos estar validamente capacitados para inferir a verdade de uma proposição, temos de saber que outra proposição é verdadeira e que há entre as duas uma relação do gênero chamado "implicação", isto é, que (como costumamos dizer) a premissa "implica" a conclusão. (Definiremos essa relação dentro em pouco.) Ou podemos saber que uma certa

outra proposição é falsa e que há uma relação entre as duas, do gênero chamado "disjunção", expressada por " p ou q ",* de modo que o conhecimento de que uma é falsa nos permite inferir que a outra é verdadeira. Mais ainda, pode ser que estejamos interessados em inferir a *falsidade* de alguma proposição e não sua verdade de outra proposição, desde que saibamos serem as duas *incompatíveis*, isto é, que, se uma é verdadeira, a outra é falsa. Também poderá ser inferida a partir da falsidade de outra proposição, nas mesmas circunstâncias em que a verdade da outra poderia ter sido inferida a partir da verdade da primeira; isto é, podemos inferir a falsidade de q a partir da falsidade de p , quando q implica p . Todos esses quatro casos são casos de inferência. Quando a nossa mente se fixa na inferência, parece natural tomar a "implicação" como relação primitiva fundamental, por ser essa a relação que deve existir entre p e q para que possamos estar capacitados a inferir a verdade de q a partir da verdade de p . Mas, por razões técnicas, essa não é a melhor idéia primitiva a escolher. Antes de passarmos às idéias e definições primitivas, consideremos mais as várias funções das proposições sugeridas pelas relações entre as proposições acima mencionadas.

A mais simples de tais funções é a negativa "não- p ". Trata-se da função de p que é verdadeira quando p é falsa, e falsa quando p é verdadeira. É conveniente falar-se da verdade de uma proposição, ou de sua falsidade, como "valor-verdade";** isto é, a *verdade* é o "valor-de-verdade" de uma proposição verdadeira, e a *falsidade* de uma proposição falsa. Assim, não- p tem o valor-de-verdade oposto ao de p .

Podemos considerar, a seguir, a *disjunção*, " p ou q ". Trata-se de uma função cujo valor-de-verdade é a verdade quando p é verdadeira e também quando q o é, mas é falsidade quando ambas p e q são falsas.

Consideremos a seguir a *conjunção*, " p e q ". Esta função tem a verdade para o seu valor-de-verdade quando p e q são ambas verdadeiras; caso contrário, tem a falsidade como seu valor-de-verdade.

Depois consideremos a *incompatibilidade*, isto é, " p e q não são ambas verdadeiras". Trata-se da negação da conjunção;

* Usaremos as letras p , q , r , s , t para denotar variáveis para proposições.

** Este termo é devido a FREGE.

é também a disjunção das negações de p e q , isto é, a função “não- p ou não- q ”. O seu valor-de-verdade é a verdade quando p é falsa, e, do mesmo modo, quando q é falsa; seu valor-de-verdade é a falsidade quando p e q são ambas verdadeiras.

Consideremos, por último, a *implicação*, isto é, “ p implica q ”, ou, “se p , então q ”. Isso deve ser entendido no mais amplo sentido que nos permita inferir a verdade de q se conhecermos a verdade de p . Assim, nós a interpretamos como significando: “A menos que p seja falsa, q será verdadeira”, ou então, “ou p é falsa ou q é verdadeira”. (O fato de “implica” ser capaz de outros significados não nos interessa; este é o significado que nos é conveniente.) Equivale a dizer, “ p implica q ” deve significar “não- p ou q ”; seu valor-de-verdade tem de ser a verdade se p for falsa, igualmente se q for verdadeira, e tem de ser a falsidade se p for verdadeira e q falsa.

Temos assim cinco funções: a negação, a disjunção, a conjunção, a incompatibilidade e a implicação. Poderíamos ter acrescentado outras, como, por exemplo, a falsidade conjunta, “não- p e não- q ”, mas as cinco acima bastarão. A negação difere das outras quatro pelo fato de ser uma função de *uma* proposição, enquanto as outras são funções de *duas*. Mas todas cinco concordam em que seus valores-de-verdade dependem apenas dos valores-de-verdade das proposições que são seus argumentos. Dada a verdade ou a falsidade de p , ou de p e q (conforme o caso), nos são dadas a verdade ou a falsidade da negação, disjunção, conjunção, incompatibilidade, ou implicação. Uma função de proposições que tem essa propriedade é chamada uma “função-de-verdade”.

O significado total de uma função-de-verdade é exaurido pelo enunciado das circunstâncias sob as quais ela é verdadeira ou falsa. A função “não- p ”, por exemplo, é simplesmente a função de p que é verdadeira quando p é falsa, e falsa quando p é verdadeira: não há qualquer outro significado que lhe possa ser assinalado. O mesmo se aplica a “ p ou q ” e às demais. Segue-se que duas funções-de-verdade que têm o mesmo valor-de-verdade para todos os valores do argumento são indistinguíveis. Por exemplo, “ p e q ” é a negação de “não- p ou não- q ” e vice-versa; assim, qualquer das duas pode ser *definida* como a negação da outra. Não há qualquer outro significado adicional em uma função-de-verdade além das condições sob as quais ela é verdadeira ou falsa.

É claro que as cinco funções-de-verdade acima não são todas independentes. Podemos definir algumas delas em termos de outras. Não há grande dificuldade em reduzir o número a duas; as duas escolhidas em *Principia Mathematica* são negação e disjunção. A implicação é então definida como “não- p ou q ”; a incompatibilidade, como “não- p ou não- q ”; a conjunção, como a negação da incompatibilidade. Mas Sheffer* mostrou que podemos contentar-nos com *uma* idéia primitiva para todas as cinco, e Nicod** mostrou que isso nos permite reduzir as proposições primitivas exigidas na teoria da dedução a dois princípios não-formais e a um formal. Com esse propósito, podemos tomar para nossa função indefinível ou a incompatibilidade ou a falsidade conjunta. Escolheremos a primeira.

A nossa idéia primitiva é, agora, uma certa função-de-verdade chamada “incompatibilidade”, que denotaremos por p/q . A negação pode ser imediatamente definida como a incompatibilidade de uma proposição consigo mesma, isto é, “não- p ” é definida como “ p/p ”. A disjunção é a incompatibilidade de não- p e não- q , isto é, ela é $(p/p)/(q/q)$. A implicação é a incompatibilidade de p e não- q , isto é, $p/q/q$. A conjunção é a negação da incompatibilidade, isto é, ela é $(p/q)|(p/q)$. Assim, todas as outras quatro funções são definidas em termos da incompatibilidade.

É óbvia a inexistência de limite para a formação de funções-de-verdade, seja pela introdução de mais argumentos ou pela repetição dos argumentos. O que nos interessa é a conexão desse assunto com a inferência.

Se sabemos que p é verdadeira e que p implica q , podemos passar a asserir q . Há sempre inevitavelmente *algo* psicológico relativamente à inferência: a inferência é um método pelo qual chegamos a um novo conhecimento, e o que não é psicológico a seu respeito é a relação que nos permite inferir corretamente; mas a passagem real da asserção de p para a asserção de q é um processo psicológico e não devemos procurar representá-lo em termos puramente lógicos.

Na prática matemática, quando inferimos, temos, sempre, alguma expressão contendo variáveis para proposições, digamos p e q , que sabemos, em virtude de sua forma, ser verdadeira

* *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. XIV, pp. 481-488.

** *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. XIX, I, janeiro de 1917.

para todos os valores de p e q ; temos também alguma outra expressão, parte da primeira, que também sabemos verdadeira para todos os valores de p e q ; e, em virtude dos princípios de inferência, podemos desprezar esta parte de nossa expressão original, e asserir o que restar. Essa consideração algo abstrata pode ser tornada mais clara por meio de uns poucos exemplos.

Admitamos conhecer os cinco princípios formais da dedução enumerados em *Principia Mathematica*. (Nicod os reduziu a um, mas, como se trata de uma proposição complicada, começaremos com as cinco.) Essas cinco proposições são:

1) " p ou p " implica p — isto é, se ou p é verdadeira ou p é verdadeira, então p é verdadeira.

2) q implica " p ou q " — isto é, a disjunção de " p ou q " é verdadeira quando uma de suas alternativas é verdadeira.

3) " p ou q " implica " q ou p ". Isso não seria exigido tivéssemos nós uma notação teoricamente mais perfeita, porquanto na concepção de disjunção não está envolvida ordem alguma, de modo que " p ou q " e " q ou p " deviam ser idênticas. Mas como os nossos símbolos, em qualquer forma conveniente, introduzem inevitavelmente uma ordem, necessitamos de suposições apropriadas para mostrar que a ordem é irrelevante.

4) Se ou p é verdadeira ou " q ou r " é verdadeira, então ou q é verdadeira ou " p ou r " é verdadeira. (A torção nesta proposição serve para aumentar o seu poder dedutivo.)

5) Se q implica r , então " p ou q " implica " p ou r ".

Esses são os princípios *formais* de dedução empregados em *Principia Mathematica*. Um princípio formal de dedução tem duplo uso e é para esclarecer isso que citamos as cinco proposições acima. Tem um uso como a premissa de uma inferência e um uso para estabelecer o fato de que a premissa implica a conclusão. No esquema de uma inferência temos uma proposição p e uma proposição " p implica q ", a partir das quais inferimos q . Mas quando estamos interessados nos princípios de dedução, o nosso aparato de proposições primitivas tem de acarretar (*yield*) tanto p como " p implica q " de nossas inferências. Equivale a dizer, nossas regras de dedução devem ser usadas não *apenas* como *regras*, que é o seu uso para estabelecer " p implica q ", mas também como premissas substantivas, isto é, como o p de nosso esquema. Suponhamos, por exemplo, que desejamos provar que se p implica q , então se q implica r segue-se que p

implica r . Temos aqui uma relação de três proposições que enunciam implicações. Façamos

$$p_1 = p \text{ implica } q, p_2 = q \text{ implica } r \text{ e } p_3 = q \text{ implica } r.$$

Temos então de provar que p_1 implica que p_2 implica p_3 . Tomemos agora o quinto de nossos princípios acima, substituamos p por não- p , lembrando que " $\text{não-}p$ ou q " é, por definição, o mesmo que " p implica q ". Assim, o nosso quinto princípio acarreta:

"Se q implica r , então ' p implica q ' implica ' p implica r '", isto é, " p_2 implica que p_1 implica p_3 ". Chamemos a essa proposição A .

Mas o quarto de nossos princípios, quando substituirmos p e q por não- p e não- q , e lembramos a definição de implicação, torna-se:

"Se p implica que q implica r , então q implica que p implica r ".

Escrevendo p_2 em lugar de p , p_1 em lugar de q , e p_3 em lugar de r , surge a seguinte forma:

"Se p_2 implica que p_1 implica p_3 , então p_1 implica que p_2 implica p_3 ". Chamemos a essa proposição B .

Provamos, agora, por meio de nosso quinto princípio, que: " p_2 implica que p_1 implica p_3 ", que era o que chamamos A .

Temos aqui, assim, uma instância do esquema da inferência, porquanto A representa o p de nosso esquema, e B representa o " p implica q ". Portanto, chegamos a q , a saber.

" p_1 implica que p_2 implica p_3 ",

que era a proposição a ser provada. Nesta prova, a adaptação de nosso quinto princípio, que acarreta A , ocorre como uma premissa substantiva; enquanto a adaptação de nosso quarto princípio, que acarreta B , é usada para dar a *forma* da inferência. Os empregos formais e materiais de premissas na teoria da dedução são estreitamente entretecidos, não sendo muito importante mantê-los separados, desde que nos apercebamos de que eles são, em teoria, distintos.

O mais antigo método de chegar a novos resultados a partir de uma premissa é o que foi ilustrado na dedução acima, mas que dificilmente poderá ser, ele próprio, chamado dedução. As proposições primitivas, sejam quais forem, devem ser consideradas asseridas de todos os valores possíveis das variáveis para proposições p , q e r , que nela ocorrem. Podemos, portanto, substituir qualquer expressão cujo valor é sempre uma proposição por (digamos) p , e.g., não- p , " s implica t ", e assim por diante. Por meio de tais substituições realmente obtemos conjuntos de casos especiais de nossa proposição original, mas, do ponto de vista prático, obtemos proposições que são virtualmente novas. A legitimidade das substituições desse tipo tem de ser garantida por meio de um princípio não-formal de inferência.*

Podemos agora enunciar o único princípio formal de inferência ao qual Nicod reduziu os cinco acima dados. Com esse propósito, mostraremos primeiro como certas funções-de-verdade podem ser definidas em termos de incompatibilidade. Já vimos que

$$p \mid (q/q) \text{ significa "p implica q".}$$

Observamos agora que

$$p \mid (q/r) \text{ significa "p implica ambos q e r",}$$

pois essa expressão significa " p é incompatível com a incompatibilidade de q e r ", isto é, " p implica que q e r não são incompatíveis", isto é, " p implica que q e r são ambas verdadeiras" — porquanto, como vimos, a conjunção de q e r é a negação de sua incompatibilidade.

Observe-se a seguir que $t \mid (t/t)$ significa " t implica a si mesma". Trata-se de um caso particular de $p \mid (q/q)$.

Escrevemos $\bar{p}$ para representar a negação de p ; assim, $\bar{p}/s$ significará a negação de p/s , isto é, significará a conjunção de p e s . Segue-se que:

$$(s/q) \mid \bar{p}/s$$

expressa a incompatibilidade de s/q com a conjunção de p e s ; em outras palavras, enuncia que se p e s são ambas verdadeiras, s/q é falsa, isto é, s e q são ambas verdadeiras; em palavras

* Tal princípio não é enunciado em *Principia Mathematica* ou no artigo de Nicod acima mencionado. Mas isso pareceria uma omissão.

ainda mais simples, enuncia que p e s conjuntamente implicam s e q conjuntamente.

Façamos agora

$$\begin{aligned} P &= p \mid (q/r), \\ \pi &= t \mid (t/t), \\ Q &= (s/q) \mid \bar{p}/s. \end{aligned}$$

Então, o único princípio formal de dedução de Nicod é:

$$P \mid \pi/Q;$$

em outras palavras, P implica ambos π e Q .

Ele emprega, em aditamento, um princípio não-formal pertencente à teoria dos tipos (que não precisa interessar-nos) e um correspondente ao princípio de que, dado p e dado que p implica q , podemos asserir q . Esse princípio é:

"Se $p \mid (r/q)$ é verdadeira e p é verdadeira, então q é verdadeira". Desse aparato segue-se toda a teoria da dedução, exceto no que concerna à dedução a partir ou da existência ou da verdade universal das "funções proposicionais" que consideraremos no próximo capítulo.

Há, se não me engano, uma certa confusão na mente de alguns autores no tocante às relações, entre proposições, em virtude das quais uma inferência é válida. A fim de que possa ser *válido* inferir q a partir de p , é somente necessário que p pudesse ser verdadeira e que a proposição "não- p ou q " pudesse ser verdadeira. Está claro que, sempre que tal seja o caso, q deve ser verdadeira. Mas só ocorrerá de fato a inferência quando a proposição "não- p ou q " for conhecida de outro modo que não por meio de conhecimento de não- p ou conhecimento de q . Sempre que p for falsa, "não- p ou q " será verdadeira, mas será inútil para a inferência, a qual exige que p seja verdadeira. Sempre que já se saiba ser q verdadeira, naturalmente saber-se-á também ser "não- p ou q " verdadeira, mas isso é também inútil para a inferência, porquanto q já é conhecida, não necessitando, portanto, ser inferida. Na verdade, a inferência só aparece quando "não- p ou q " pode ser conhecida sem que já saibamos qual das duas alternativas é a que torna a disjunção verdadeira. Mas as circunstâncias sob as quais isso ocorre são aquelas em que certas relações de forma existem entre p e q . Por exemplo, sabemos que se r implica a negação de s , então s implica a negação de r . Entre " r implica não- s " e " s implica não- r " há uma

relação formal que nos permite *saber* que a primeira implica a segunda sem termos de saber antes que a primeira é falsa ou saber que a segunda é verdadeira. É sob tais circunstâncias que a relação de implicação é praticamente útil para se tirar inferências.

Mas essa relação formal só é exigida para que possamos estar capacitados a *saber* que a premissa ou é falsa ou a conclusão é verdadeira. É a verdade de “não- p ou q ” que se exige para a validade da inferência; o que se faz ainda necessário só é necessário à viabilidade prática da inferência. O Professor C. I. Lewis* estudou em especial a relação formal mais estreita que podemos chamar “dedutibilidade formal”. Sugere ele que a relação mais ampla, a expressada por “não- p ou q ”, não deve ser chamada “implicação”. Isso é, contudo, uma questão de palavras. Se o uso que fizemos das palavras for consistente, pouco importa como a definamos. É o seguinte o ponto essencial de diferença entre a teoria que defendo e a teoria defendida pelo Professor Lewis: Ele sustenta que, quando uma proposição q é “formalmente deduzível” de outra, p , a relação que percebemos haver entre elas é a que ele chama “implicação estrita”, que não é a relação expressa por “não- p ou q ”, mas uma relação mais estreita, que só se verifica quando há certas conexões formais entre p e q . Sustento que, haja ou não a relação a que ele se refere, ela será, de qualquer forma, uma relação da qual a Matemática não necessita, e, portanto, uma relação que, por questão geral de economia, não deve ser admitida em nosso aparato de noções fundamentais; que, seja qual for a relação de “dedutibilidade formal” entre duas proposições, o que é o caso é podermos ver que ou a primeira é falsa ou a segunda é verdadeira, e que nada além desse fato tem de ser admitido em nossas premissas; e que, finalmente, as razões de detalhe que o Professor Lewis alega contra o ponto de vista que defendo podem ser todas contraditadas em detalhe e dependem, para ser plausíveis, de uma suposição dissimulada e inconsciente do ponto de vista que rejeito. Concluo, portanto, não haver necessidade alguma de admitir como noção fundamental qualquer forma de implicação não expressável como uma função-de-verdade.

* Ver *Mind*, vol. XXI, 1912, pp. 522-531; e vol. XXIII, 1914, pp. 240-247.

CAPÍTULO XV

Funções proposicionais

QUANDO, NO CAPÍTULO PRECEDENTE, discutimos as proposições, não tentamos dar uma definição da palavra “proposição”. Mas, conquanto a palavra não possa ser formalmente definida, é necessário dizer algo quanto ao seu significado, para evitar a confusão muito comum com “funções proposicionais”, que serão o tópico deste capítulo.

Por “proposição” queremos dizer primariamente uma forma de palavras que expressa o que é ou o verdadeiro ou o falso. Digo “primariamente”, porque não desejo excluir outros símbolos que não os verbais, ou até os meros pensamentos, se eles tiverem caráter simbólico. Mas penso que a palavra “proposição” deve ser limitada ao que pode, em algum sentido, ser chamado “símbolo”, e, mais ainda, àqueles símbolos que dêem expressão à verdade ou à falsidade. Assim, “dois e dois são quatro” e “dois e dois são cinco” serão proposições, o mesmo se dando com relação a “Sócrates é um homem” e “Sócrates não é um homem”. O enunciado: “Sejam quais forem os números a e b , $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ” é uma proposição; mas a simples fórmula “ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ” não o é, desde que ela não asseire coisa alguma definida, a menos que nos seja dito, ou sejamos levados a supor, que a e b poderão ter todos os valores possíveis ou deverão ter estes ou aqueles valores. A primeira destas duas condições está, como de regra, taticamente admitida na enunciação das fórmulas matemáticas, as quais se tornam, assim, proposições; mas se não fosse essa suposição, elas seriam “funções proposicionais”. Uma “função proposicional” é, na verdade, uma expressão contendo um ou mais constituintes indeterminados tais que, quando lhes são assinalados valores, a expressão se torna uma proposição. Em outras palavras, ela é uma função cujos valores são proposições. Mas esta última

definição tem de ser usada com cautela. Uma função descritiva, e.g., "a mais difícil proposição no tratado matemático de A ", não será uma função proposicional, embora seus valores sejam proposições. Mas em tal caso as proposições são apenas descritivas: em uma função proposicional, os valores devem realmente *enunciar* proposições.

É fácil dar-se exemplos de funções proposicionais: " x é humano" é uma função proposicional; enquanto x permanecer indeterminado, não será verdadeira nem falsa, mas quando um valor é assinalado a x , ela se torna uma proposição verdadeira ou falsa. Qualquer equação matemática é uma função proposicional. Enquanto as variáveis não tiverem valor definido algum, a equação será meramente uma expressão aguardando determinação a fim de se tornar uma proposição verdadeira ou falsa. Se for uma equação contendo uma variável, tornar-se-á verdadeira quando a variável for tornada igual a uma raiz da equação, tornando-se, de outro modo, falsa; mas se for uma "identidade", será verdadeira quando a variável for qualquer número. A equação de uma curva no plano ou de uma superfície no espaço é uma função proposicional, verdadeira para valores das coordenadas pertencentes aos pontos da curva ou da superfície, falsa para outros valores. Expressões da Lógica tradicional, tais como "todo A é B ", são funções proposicionais: A e B têm de ser determinados como classes definidas para que tais expressões sejam verdadeiras ou falsas.

A noção de "casos" ou "instâncias" depende das funções proposicionais. Consideremos, por exemplo, a espécie de processo sugerido pelo que é chamado "generalização" e vejamos algum exemplo muito primitivo — digamos, "o relâmpago é seguido do trovão". Temos várias instâncias" disso, isto é, várias proposições como: "isso é um relâmpago e é seguido do trovão". Essas ocorrências são "instâncias" de quê? São instâncias da função proposicional: "Se x é um relâmpago, x é seguido de trovão". O processo de generalização (em cuja validade felizmente não estamos interessados) consiste em passar de diversas dessas instâncias para a verdade *universal* da função proposicional: "Se x é um relâmpago, x é seguido de trovão". Constatar-se-á que, de maneira análoga, as funções proposicionais estão sempre envolvidas quando falamos de instâncias ou casos ou exemplos.

Não precisamos perguntar ou tentar responder a pergunta: "Que é uma função proposicional?" Uma função proposicional considerada isoladamente pode ser tomada como um mero esque-

ma, um mero invólucro, um receptáculo vazio para o significado e não como algo já significante. Falando de modo amplo, estamos interessados de duas maneiras nas funções proposicionais: primeiro, quando envolvidas nas noções de "verdadeira em todos os casos" e "verdadeira em alguns casos"; segundo, quando envolvidas na teoria das classes e relações. Protelaremos a consideração do segundo desses tópicos para um capítulo posterior; o primeiro nos ocupará agora.

Quando dizemos que algo é "sempre verdadeiro" ou "verdadeiro em todos os casos", é claro que o "algo" envolvido não pode ser uma proposição. Uma proposição é apenas verdadeira ou falsa, e está terminada a questão. Não há casos nem instâncias de "Sócrates é um homem" ou de "Napoleão morreu em Santa Helena". Estas são proposições e seria sem significado falar-se de serem verdadeiras "em todos os casos". Essa frase só é aplicável às *funções* proposicionais. Tomemos, por exemplo, o gênero de coisa que é freqüentemente dita quando a causação está sendo discutida. (Não estamos interessados na verdade ou falsidade do que é dito, mas apenas em sua análise lógica.) Dizem-nos que A é, em todas as instâncias, seguido de B . Mas, se há "instâncias" de A , é porque A deve ser algum conceito geral do qual é significante dizer " x_1 é A ", " x_2 é A ", " x_3 é A ", e assim por diante, onde x_1 , x_2 , x_3 são particulares que não são idênticos entre si. Isso se aplica, e.g., ao nosso caso anterior do relâmpago. Dizemos que o relâmpago (A) é seguido do trovão (B). Mas os diversos relâmpagos são particulares, não idênticos, mas compartilhando da propriedade comum de ser relâmpago. A única maneira de expressar uma propriedade comum de modo geral é dizer que uma propriedade comum a vários objetos é uma função proposicional que se torna verdadeira quando qualquer desses objetos é tomado para valor da variável. Neste caso, todos os objetos são "instâncias" da verdade da função proposicional — porque uma função proposicional, conquanto não possa ser por si verdadeira ou falsa, é verdadeira para certas instâncias e falsa para certas outras, a menos que seja "sempre verdadeira" ou "sempre falsa". Quando, voltando ao nosso exemplo, dizemos que A é para todas as instâncias seguido de B , queremos dizer que, seja x o que for, se x for um A , ele é seguido de um B ; isto é, estamos asserindo que uma certa função proposicional é "sempre verdadeira".

As sentenças envolvendo palavras como "todos", "todas", "cada", "todo", "toda", "um", "uma", "o", "a", "alguns", "al-

gumas" exigem uma função proposicional para sua interpretação. A maneira pela qual as funções proposicionais ocorrem pode ser explicada por meio de duas das palavras acima, a saber: "todo" (ou "toda") e "algum" (ou "alguma").

Há, em última análise, apenas duas coisas que podem ser feitas com uma função proposicional: uma é asserir que ela é verdadeira em *todos* os casos; outra é asserir que ela é verdadeira em pelo menos um caso, ou em *alguns* casos (como diremos, admitindo que não haverá implicação necessária alguma de uma pluralidade de casos). Todos os outros usos das funções proposicionais podem ser reduzidos a esses dois. Quando dizemos que uma função proposicional é verdadeira "em todos os casos", ou "sempre" (como também diremos, sem qualquer sugestão temporal), queremos dizer que todos os seus valores são verdadeiros. Se " ϕx " é a função, e a é o gênero certo de objeto para ser um argumento para " ϕx ", então ϕa será verdadeira, independentemente de como a tenha sido escolhido. Por exemplo, "se a é humano, a é mortal" é verdadeiro se a for humano ou não; na verdade, toda proposição dessa forma é verdadeira. Assim, a função proposicional "se x é humano, x é mortal" é "sempre verdadeira" ou "verdadeira em todos os casos". Ou, ainda o enunciado "não há unicórnios" é o mesmo que o enunciado "a função proposicional ' x não é um unicórnio' é verdadeira em todos os casos". As asserções do capítulo anterior sobre proposições, e.g., " p ou q implica ' q ou p '", são realmente asserções de que certas funções proposicionais são verdadeiras em todos os casos. Não asserimos, por exemplo, que o princípio acima seja verdadeiro somente para este ou aquele p ou q particulares, mas que são verdadeiros para *qualquer* p ou q a respeito do qual possa ser significantemente asserido. A condição de que uma função deva ser significativa para um determinado argumento é a mesma que a condição de que ela deva ter um valor para aquele argumento, seja verdadeiro ou falso. O estudo das condições de significação pertence à doutrina dos tipos, que não apreciaremos além do esboço dado no capítulo precedente.

Não apenas os princípios de dedução, mas todas as proposições primitivas da Lógica, consistem de asserções de que certas funções proposicionais são sempre verdadeiras. Se tal não fosse o caso, elas teriam de mencionar coisas ou conceitos — Sócrates, ou vermelhidão, ou Leste e Oeste, ou seja lá o que for — e, claro, não é do domínio da Lógica fazer asserções que são verdadeiras relativamente a tal coisa ou conceito, mas não relativa-

mente a outro. É parte da definição de Lógica (mas não sua definição completa) que todas as suas proposições sejam completamente gerais, isto é, todas consistem na asserção de que algumas funções proposicionais não contendo termos constantes são sempre verdadeiras. Voltaremos, em nosso capítulo final, à discussão das funções proposicionais que não contêm termos constantes. No momento, passaremos a outra coisa a ser feita com uma função proposicional, a saber, a asserção de que ela é "algumas vezes verdadeira", isto é, verdadeira para pelo menos uma instância.

Quando dizemos "há homens", isso significa que a função proposicional " x é um homem" é algumas vezes verdadeira. Quando dizemos "alguns homens são gregos", isso significa que a função proposicional " x é um homem e um grego" é algumas vezes verdadeira. Quando dizemos "canibais ainda existem na África" é algumas vezes verdadeira, isto é, verdadeira para alguns valores de x . Dizer "há pelo menos n indivíduos no mundo" equivale a dizer que a função proposicional " α é uma classe de indivíduos e um membro do número cardinal n " é algumas vezes verdadeira, ou, como podemos dizer, é verdadeira para certos valores de α . Essa forma de expressão é mais conveniente quando se faz necessário indicar qual a variável para constituinte que estamos tomando como argumento para nossa função proposicional. Por exemplo, a função proposicional acima, que podemos abreviar para " α é uma classe de n indivíduos", contém duas variáveis, α e n . O axioma da infinidade, na linguagem das funções proposicionais, é: "A função proposicional 'se n é um número indutivo, é verdadeiro, para alguns valores de α , onde α é uma classe de n indivíduos' é verdadeira para todos os valores possíveis de n ". Há aqui uma função subordinada, " α é uma classe de n indivíduos", que se diz ser, com respeito a α , *algumas vezes verdadeira*; e a asserção de que isso acontece, se n é um número indutivo, é dita ser, com respeito a n , *sempre verdadeira*.

O enunciado de que uma função ϕx é sempre verdadeira é a negação do enunciado de que não- ϕx é algumas vezes verdadeira, e o enunciado de que ϕx é algumas vezes verdadeira é a negação do enunciado de que não- ϕx é sempre verdadeira. Assim, o enunciado de que "todos os homens são mortais" é a negação do enunciado de que a função " x é um homem imortal" é algumas vezes verdadeira. E o enunciado de que "há unicórnios" é a negação do enunciado de que a função " x não é um

unicórnio" é sempre verdadeira.* Dizemos que ϕx é "nunca verdadeira" ou "sempre falsa" se $\neg \phi x$ é sempre verdadeira. Podemos, se o quisermos, tomar um dos elementos do par "sempre", "algumas vezes" como idéia primitiva, definindo o outro por meio do primeiro e da negação. Assim, se escolhermos "algumas vezes" como idéia primitiva, poderemos definir: " ϕx é sempre verdadeira" deve significar 'é falso que $\neg \phi x$ é algumas vezes verdadeira'.** Mas, por razões ligadas à teoria dos tipos, parece mais correto tomar-se ambos "sempre" e "algumas vezes", como idéias primitivas, definindo com seu auxílio a negação de proposições em que ocorrem. Equivale a dizer, admitindo já termos definido (ou adotado como idéia primitiva) a negação das proposições do tipo a que x pertence, definimos: "A negação de ' ϕx sempre' é ' $\neg \phi x$ algumas vezes'; e a negação de ' ϕx algumas vezes' é ' $\neg \phi x$ sempre' ". De igual modo podemos redefinir a disjunção e as outras funções-de-verdade, quando aplicadas a proposições contendo variáveis aparentes, em termos das redefinições e idéias primitivas para proposições não contendo variável aparente alguma. As proposições que não contêm variáveis aparentes são chamadas "proposições elementares". Dessas, podemos ascender, passo a passo, usando os métodos há pouco indicados, até as teorias das funções-de-verdade quando aplicadas a uma, duas, três... variáveis, ou a qualquer número delas até n , sendo n qualquer número finito assinalado.

As formas que são tomadas como sendo as mais simples na Lógica formal tradicional estão longe de o ser, envolvendo, todas, a asserção de todos ou de alguns valores de uma função proposicional composta. Tomemos, para começar, "todo S é P ". Admitiremos ser S definido por uma função proposicional ϕx , e P por uma função proposicional ψx . Por exemplo, se S é *homens*, ϕx será " x é humano"; se P é *mortais*, ψ será "há um tempo no qual x morre". Então, "todo S é P " significa: " ϕx implica x é sempre verdadeira". Cabe observar que "todo S é P " não se aplica apenas aos termos que não são realmente S ; diz igualmente algo sobre termos que não são S . Suponhamos deparar com um x que não sabemos se é ou não um S ; ainda assim, o nosso enunciado "todo S é P " nos diz algo sobre x , a

saber, que se x é um S , então x é um P . E isso é inteiramente verdadeiro quando x não é um S como quando x é um S . Se não fosse igualmente verdadeiro em ambos os casos, a *reductio ad absurdum* não seria um método válido; pois a essência desse método consiste em usar implicações em caso nos quais (como se constata posteriormente) a hipótese é falsa. Podemos situar a coisa de outro modo. Não é necessário, para entendermos "todo S é P ", estarmos capacitados a enumerar os termos que são S ; desde que saibamos o que quer dizer ser S e ser P , podemos compreender completamente o que é realmente afirmado por "todo S é P ", não importando o pouco que possamos saber das instâncias reais de cada um. Isso mostra que não é meramente os termos reais que são S que são relevantes no enunciado "todo S é P ", mas todos os termos a respeito dos quais seja significativa a suposição de que eles sejam S , isto é, todos os termos que são S , juntamente com todos os termos que não são S — isto é, todos os do "tipo" lógico apropriado. O que se aplica a enunciados acerca de *todos* aplica-se também a enunciados acerca de *alguns*. "Há homens", por exemplo, significa que " x é humano" é verdadeira para *alguns* valores de x . Aqui, *todos* os valores de x (isto é, todos os valores para os quais " x é humano" seja significativa, quer verdadeira, quer falsa) são relevantes, e não apenas aqueles que de fato são humanos. (Isso se torna óbvio se consideramos como poderíamos provar que tal enunciado é falso.) Toda asserção sobre "todos" ou "alguns" envolve, assim, não apenas os argumentos que tornam uma certa função verdadeira, mas também todos os que a tornam significativa, isto é, todos para os quais ela tenha algum valor, seja verdadeiro, seja falso.

Podemos agora prosseguir em nossa interpretação das formas tradicionais da Lógica formal antiquada. Admitamos que S é aqueles termos x para os quais ϕx é verdadeira, e P aqueles para os quais ψx é verdadeira. (Como veremos em capítulo posterior, todas as classes são derivadas, desde modo, a partir de funções proposicionais.) Então,

"Todo S é P significa " ϕx implica ψ " é sempre verdadeira".

"Algum S é P " significa " ϕx e ψx " é algumas vezes verdadeira".

"Nenhum S é P " significa " ϕx implica $\neg \psi x$ " é sempre verdadeira".

* O método de dedução é dado em *Principia Mathematica*, vol. I, * 9.

** Por razões lingüísticas, é freqüentemente conveniente, para evitar sugerir o plural ou o singular, dizer " ϕx não é sempre falsa" em vez de " ϕx algumas vezes" ou " ϕx é algumas vezes verdadeira".

“Algum S não é P ” significa “ ϕx e não- ψx é algumas vezes verdadeira”.

Cabe observar que as funções proposicionais que aqui são asseridas para todos ou alguns valores não são os próprios ϕx e ψx , mas funções-de-verdade de ϕx e de ψx para o *mesmo* argumento x . A maneira mais fácil de se conceber o gênero de coisa visada não está em começar a partir de ϕx e ψx em geral, mas a partir de ϕa e ψa é alguma constante. Suponhamos estarmos considerando todos os “homens são mortais”: comecemos com

“Se Sócrates é humano, Sócrates é mortal”,

e depois consideraremos “Sócrates” substituído por uma variável x onde quer que “Sócrates” ocorra. O objeto a ser garantido é que, embora x permaneça uma variável, sem qualquer valor definido, ele tem de ter o mesmo valor em “ ϕx ” que em “ ψx ” quando estivermos asserindo que “ ϕx implica ψx ” é sempre verdadeira. Isso exige que comecemos com uma função cujos valores sejam tais que tenhamos “ ϕa implica ψa ” e não com duas funções separadas ϕx e ψx ; pois, se começarmos com duas funções separadas, jamais poderemos assegurar que o x , conquanto permanecendo indeterminado, tenha o mesmo valor em ambas.

Para sermos breves, dizemos “ ϕx sempre implica ψx ” quando queremos dizer que “ ϕx implica ψx ” é sempre verdadeira. As proposições da forma “ ϕx sempre implica ψx ” são chamadas “implicações formais”; esse nome é igualmente empregado quando haja diversas variáveis.

As definições acima mostram como estão distanciadas das formas mais simples as proposições como “todo S é P ”, com as quais começa a Lógica tradicional. É típico da carência de análise da Lógica formal o fato de ela tratar “todo S é P ” como uma proposição da mesma forma que “ x é P ” — *e.g.*, ela trata “todos os homens são mortais” como sendo da mesma forma que “Sócrates é mortal”. Como acabamos de ver, a primeira é da forma “ ϕx sempre implica ψx ”, enquanto a segunda é da forma “ ψx ”. A enfática separação dessas duas formas, realizada por Peano e Frege, constituiu avanço assaz vital em Lógica simbólica.

Ver-se-á que “todo S é P ” e “nenhum S é P ” não diferem realmente na forma, exceto pela substituição de não- ψx por ψx , e que o mesmo se aplica a “algum S é P ” e “algum S não é P ”. Cabe também observar serem as regras tradicionais de conversão errôneas, caso adotemos o único ponto de vista tecnicamente tolerável de que proposições como “todo S é P ” não envolve a “existência” do S , isto é, não exige a existência de termos que sejam S . As definições acima conduzem ao resultado de que, se ϕx é sempre falsa, isto é, se não há S algum, então “todo S é P ” e “nenhum S é P ” serão, ambas, verdadeiras, seja qual for P . Pois, de acordo com a definição apresentada no último capítulo “ ϕx implica ψx ”, o significa “não- ϕx ou ψx ” que é sempre verdadeiro se não- ϕx for sempre verdadeira. Esse resultado poderá, no primeiro momento, levar o leitor a desejar definições diferentes, mas um pouco de experiência prática logo mostrará que quaisquer definições diferentes seriam inconvenientes e ocultariam as idéias importantes. A proposição “ ϕx sempre implica ψx e ϕx é algumas vezes verdadeira” é essencialmente composta e seria assaz inábil apresentá-la como a definição de “todo S é P ”, porque então não sobraria linguagem alguma para “ ϕx sempre implica ψx ”, que é necessária centenas de vezes para cada vez que a outra é necessária. Mas, com as nossas definições, “todo S é P ” não implica “algum S é P ”, porquanto a primeira permite a não-existência de S e a segunda não o permite; assim, torna-se inválida a conversão *per accidens* e alguns modos do silogismo são falaciosos, *e.g.*, Darapti: “Todo M é S , todo M é P , logo algum S é P ”, que falha se não houver M algum.

A noção de “existência” tem várias formas, uma das quais nos ocupará no próximo capítulo; mas a forma fundamental é aquela que é derivada imediatamente a partir da noção de “algumas vezes verdadeira”. Dizemos que um argumento a “satisfaz” uma função ϕx se ϕa é verdadeira; isso tem o mesmo sentido em que se diz que as raízes de uma equação satisfazem a equação. Mas se ϕx é algumas vezes verdadeira, podemos dizer que há x para os quais é verdadeira, ou podemos dizer que “existem argumentos que satisfazem ϕx ”. Esse é o significado fundamental da palavra “existência”. Outros significados ou são derivados desse ou corporificam mera confusão de pensamento. Podemos dizer corretamente “existem homens” significando que “ x é um homem” é algumas vezes verdadeira. Mas se estruturamos um pseudo-silogismo: “Os homens existem, Só-

crates é um homem, logo Sócrates existe", estaremos falando sem sentido, porquanto "Sócrates" não é, como "homens", meramente um argumento indeterminado para uma função proposicional dada. A falácia é aproximadamente análoga à do argumento: "Os homens são numerosos, Sócrates é um homem, portanto Sócrates é numeroso". Neste caso, está claro que a conclusão é sem sentido, mas, no caso da existência, não é óbvio, por motivos que surgirão mais plenamente no próximo capítulo. No momento, observemos meramente o fato de que, embora seja correto dizer "os homens existem", é incorreto, ou antes sem significado, imputar existência a um dado particular x que acontece ser um homem. De modo geral, "existem termos que satisfazem ϕx " significa " ϕx é algumas vezes verdadeira"; mas " a existe" (onde a é um termo que satisfaz ϕx) é um mero ruído ou figura, carente de significado. Constatar-se-á que, tendo em mente essa simples falácia, podemos solucionar muitas antigas dificuldades filosóficas relativas ao significado da existência.

Outro conjunto de noções que a Filosofia se permitiu cair em desesperadas confusões ao não separar suficientemente as proposições das funções proposicionais é o das noções de "modalidade": *necessário*, *possível* e *impossível*. (*Contingente* ou *assertório* são por vezes usados em vez de *possível*.) A concepção tradicional era que, entre as proposições verdadeiras, algumas eram necessárias, enquanto outras eram meramente contingentes ou assertóricas; enquanto que, entre as proposições falsas, algumas eram impossíveis, a saber, aquelas cujas contradições eram necessárias, enquanto a outras meramente acontecia não serem verdadeiras. De fato, contudo, não havia nenhuma explicação clara do que era acrescentado à verdade pela concepção de necessidade. No caso das funções proposicionais, a divisão triplíce é óbvia. Se " ϕx " é um valor indeterminado de uma certa função proposicional, será *necessário* se a função for sempre verdadeira, *possível* se for algumas vezes verdadeira e *impossível* se ela nunca for verdadeira. Esse gênero de situação surge em relação à probabilidade, por exemplo. Suponhamos que seja tirada uma bola x de uma sacola onde estão várias bolas: se todas as bolas forem brancas, " x é branca" é necessário; se algumas forem brancas, será possível; se nenhuma for branca, será impossível. Aqui, tudo o que se *sabe* sobre x é que ele satisfaz uma certa função proposicional, a saber, " x era uma bola que estava dentro da sacola". Trata-se de situação

que é geral em problemas de probabilidades e não é incomum na vida prática — por exemplo, quando somos procurados por uma pessoa da qual nada sabemos, exceto que traz uma carta de apresentação de nosso amigo Fulano de Tal. Em todos esses casos, no tocante à modalidade em geral, a função proposicional é relevante. Para o raciocínio claro, em muitas direções bem diversas, o hábito de manter as funções proposicionais claramente separadas das proposições é da mais alta importância, e o malogro em fazê-lo no passado foi uma desgraça para a Filosofia.

CAPÍTULO XVI

Descrições

LIDAMOS, NO CAPÍTULO PRECEDENTE, com as palavras *toda*, *toda*, *algum*, *alguma* e seus plurais; neste capítulo, consideraremos os artigos *o* e *a*, no singular, e, no capítulo seguinte, consideraremos esses dois artigos no plural. Poderá parecer excessivo dedicar-se dois capítulos a estas palavras, mas, para o matemático filosófico são palavras de grande importância: como o gramático de Browning * com o enclítico $\hat{\epsilon}$, eu daria a doutrina dessas palavras se estivesse “morto da cintura para baixo” e não meramente em uma prisão.

Já tivemos ocasião de mencionar as “funções descritivas”, isto é, expressões como “o pai de x ” ou o “seno de x ”. Essas expressões têm de ser definidas definindo-se primeiro as “descrições”.

Uma “descrição” pode ser de dois gêneros — definida e indefinida (ou ambígua). Uma descrição indefinida é uma frase da forma “um assim-assim” e uma descrição definida é uma frase da forma “o assim-assim”. Começemos com a primeira.

“Com quem você se encontrou?” “Encontrei-me com um homem”. “Essa é uma descrição assaz indefinida”. Não nos estamos, portanto, afastando do uso corrente em nossa terminologia. Nossa pergunta é: Que assiro eu realmente quando assiro. “Encontrei-me com um homem”? Admitamos, no momento, que a minha asserção é verdadeira e que de fato eu me encontrei com Jones. Está claro que o que eu assiro *não* é “Encontrei-me com Jones”. Posso dizer “Encontrei-me com um homem, mas

não era Jones”; nesse caso, embora eu esteja mentindo, não me contradigo, como o faria se quando eu dissesse que me encontrei com um homem eu realmente quisesse dizer que me encontrei com Jones. Está claro também que a pessoa com quem falo pode entender o que digo, ainda que seja um estrangeiro e jamais tenha ouvido falar de Jones.

Mas podemos ir mais além: não apenas Jones, mas nenhum outro homem real, entra em meu enunciado. Isso se torna óbvio quando o enunciado é falso, porquanto, a partir daí, não há mais razão para que Jones, ou qualquer outra pessoa, pudesse ser suposto entrar na proposição. Com efeito, o enunciado continuaria significante, embora não pudesse ser, possivelmente verdadeiro, mesmo que não existisse homem algum. “Encontrei-me com um unicórnio” ou “encontrei-me com uma serpente marinha” são asserções perfeitamente significantes, se sabemos o que seria o que vem a ser um unicórnio ou uma serpente marinha, isto é, qual a definição desses monstros fabulosos. Assim, somente o que podemos chamar *conceito* entra na proposição. No caso do “unicórnio”, por exemplo, há apenas o conceito: não há, também, em algum lugar nas sombras, algo irreal que possa ser chamado “um unicórnio”. Portanto, como é *significante* (embora falso) dizer “encontrei-me com um unicórnio”, está claro que essa proposição, corretamente analisada, não contém um constituinte “um unicórnio”, embora contenha o conceito “unicórnio”.

A questão da “irrealidade”, com que deparamos neste ponto, é muito importante. Erroneamente conduzidos pela gramática, a grande maioria dos lógicos que lidaram com essa questão cuidou dela segundo linhas erradas. Consideraram a forma gramatical um guia mais seguro na análise do que de fato é. E não souberam quais diferenças na forma gramatical são importantes. “Encontrei-me com Jones” e “encontrei-me com um homem” seriam tradicionalmente consideradas proposições da mesma forma, mas, na realidade, são de formas muito diferentes: a primeira nomeia uma pessoa real, Jones, enquanto a segunda envolve uma função proposicional, tornando-se, quando tornada explícita: “A função ‘encontrei-me com x e x humano’ é algumas vezes verdadeira”. (Cabe lembrar que adotamos a convenção de usar “algumas vezes” como não implicando mais de uma vez.) Essa proposição, não é, obviamente, da forma “encontrei-me com x ”, que justifica a existência da proposição “encontrei-me com um unicórnio” a despeito do fato de não existir uma coisa como “um unicórnio”.

* Nos dramas em forma de monólogo *Men and Women*, ROBERT BROWNING nos proporciona cinquenta de seus mais belos poemas, entre os quais “The Grammarian’s Funeral”, a cujo personagem se refere BERTRAND RUSSELL. (N. do T.)

Na falta de um aparato de funções proposicionais, muitos lógicos foram levados à conclusão de que há objetos irrealis. É alegado, e.g., por Meinong,* que podemos falar sobre "a montanha de ouro", "o quadrado redondo", e assim por diante; podemos formar proposições verdadeiras das quais essas coisas são os objetos; portanto, elas devem ter alguma espécie de ser lógico, pois, de outro modo, as proposições em que ocorrem seriam sem significado. Parece-me que em tais teorias há uma falha do sentimento de realidade que deve ser preservado até mesmo nos estudos mais abstratos. Sustento que a Lógica não deve admitir um unicórnio mais do que o admite a Zoologia; pois a Lógica está tão interessada no mundo real quanto na verdade o está a Zoologia, embora com suas características mais abstratas e gerais. Dizer que os unicórnios têm uma existência na heráldica ou na literatura ou na imaginação é a mais lamentável e mesquinha das evasões. O que existe na heráldica não é um animal, feito de carne e osso, movendo-se e respirando por sua própria iniciativa. O que existe é uma figura ou uma descrição com palavras. Similarmente, dizer que Hamlet, por exemplo, existe em seu próprio mundo, a saber, no mundo da imaginação de Shakespeare, tão verdadeiramente quanto (digamos) Napoleão existiu no mundo comum, é dizer algo deliberadamente destinado a confundir, ou, então, confundido em um grau dificilmente acreditável. Só existe um mundo, o mundo "real": a imaginação de Shakespeare é parte dele e os pensamentos que ele teve ao escrever Hamlet são reais. Também o são os pensamentos que temos ao ler a peça. Mas é da própria essência da ficção o fato de apenas os pensamentos, sentimentos, etc. em Shakespeare e seus leitores serem reais e de não haver, além deles, um Hamlet objetivo. Ao se dar conta das reações provocadas por Napoleão nos escritores e leitores da História, você não terá tocado o homem real; mas, no caso de Hamlet, você terá chegado ao âmago. Se ninguém tivesse pensado em Hamlet, nada restaria dele; se ninguém tivesse pensado em Napoleão, ele teria, logo, providenciado para que alguém o fizesse. O senso de realidade é vital em Lógica, e, se alguém fizer prestidigitações com ele, simulando que Hamlet tenha qualquer outra espécie de realidade, estará prestando um desserviço ao pensamento. Um robusto senso de realidade é muito necessário à estruturação de uma análise correta de proposições

* *Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie*, 1904.

sobre unicórnios, montanhas de ouro, quadrados redondos e outros pseudo-objetos do gênero.

Em obediência ao sentimento de realidade, insistiremos em que, na análise das proposições, nada de "irreal" deva ser admitido. Mas, afinal de contas — poder-se-á perguntar — se *nada existe* de irreal, como *poderíamos* admitir algo irreal? A resposta é que se *atribuímos* significância a grupos de símbolos que não têm significância alguma, cairemos no erro de admitir irrealidades, no único sentido em que isso é possível, a saber, como objetos descritos. Na proposição "encontrei-me com um unicórnio", as cinco palavras, tomadas em conjunto, formam uma proposição *significante*, e a palavra "unicórnio" é, *por si*, *significante*, no mesmo sentido em que o é a palavra "homem". Mas as *duas* palavras "um unicórnio" não formam um grupo subordinado com um significado próprio. Assim, se atribuímos, falsamente, um significado a essas duas palavras, surpreendemo-nos *cavalgando* "um unicórnio", e com o problema de determinar como pode acontecer tal coisa em um mundo onde não há unicórnios. A expressão "um unicórnio" é uma descrição indefinida que não descreve nada. Não é uma descrição indefinida que descreve algo irreal. Uma proposição como "*x* é irreal" só tem significado quando "*x*" é uma descrição, definida ou indefinida; nesse caso, a proposição será verdadeira se "*x*" for uma descrição que nada descreva. Mas, descrevendo ou não alguma coisa, a descrição "*x*" não é, em caso algum, um constituinte da proposição em que ela ocorre; como "um unicórnio", não é um grupo subordinado que tenha uma significação própria. Tudo isso resulta do fato de que, quando "*x*" é uma descrição, "*x* é irreal" ou "*x* não existe" não é sem sentido, sendo sempre *significante*, e, por vezes, verdadeiro.

Podemos passar, agora, a definir, de modo geral, o significado de proposições que contêm descrições ambíguas. Suponhamos que desejamos fazer algum enunciado sobre "um assim-assim", em que "assim-assim" são os objetos que têm uma certa propriedade ϕ , isto é, aqueles objetos x para os quais a função proposicional ϕx é verdadeira. (E.g., se tomarmos "um homem" como instância de "um assim-assim", ϕx será " x é humano"). Vamos agora asserir a propriedade ψ de "um assim-assim", isto é, queremos asserir que "um assim-assim" tem a propriedade que x tem quando ψx é verdadeira. (E.g., no caso de encontrei-me com um homem", ψx será "encontrei-me com x ".) Mas a proposição de que "um assim-assim" tem a propriedade ψ

não é uma proposição da forma " ψx ". Se o fosse, "um assim-assim" teria de ser idêntico a x para um x apropriado; e, embora (em certo sentido) isso possa ser verdadeiro em alguns casos, certamente não o é no caso de "um unicórnio". É justamente este fato de o enunciado de que um "assim-assim" que tenha a propriedade ψ não ser da forma ψx o que torna possível a "um assim-assim" ser, em certo sentido claramente definido, "irreal". A definição é como se segue:

O enunciado de que "um objeto tendo a propriedade de ϕ tem a propriedade ψ "

significa:

"A asserção conjunta de ϕx e ψx não é sempre falsa".

No que tange à Lógica, trata-se da mesma proposição que pode ser expressada por "alguns ϕ são ψ "; mas retoricamente há uma diferença, porque em um dos casos há uma sugestão de singularidade, enquanto no outro caso há a pluralidade. Mas isso não é, contudo, o ponto importante. O ponto importante é que, quando corretamente analisadas, constata-se que as proposições verbalmente sobre "um assim-assim" não contêm algum representado por essa frase. E é por isso que tais proposições podem ser significantes até mesmo quando não há tal coisa como um assim-assim.

A definição de *existência*, conforme aplicada a descrições ambíguas, resulta do que foi dito no fim do capítulo precedente. Dizemos que "homens existem" ou que "um homem existe" se a função proposicional " x é humano" é algumas vezes verdadeira; e, de modo geral, "um assim-assim" existe se " x é assim-assim" é algumas vezes verdadeira. Podemos passar isto para outra linguagem. A proposição "Sócrates é um homem" é, sem dúvida alguma, *equivalente* a "Sócrates é humano", mas não é exatamente a mesma proposição. O é de "Sócrates é humano" expressa a relação de sujeito e predicado; o é de "Sócrates é um homem" expressa identidade. É uma desgraça para a raça humana o fato de ela ter escolhido empregar a mesma palavra "é" para expressar essas duas idéias inteiramente diferentes — uma desgraça que a linguagem lógica simbólica naturalmente remedia. A identidade em "Sócrates é um homem" é identidade entre um objeto nomeado (aceitando-se "Sócrates" como um nome, sujeito a qualificações mais tarde explicadas) e um

objeto ambigualmente descrito. Um objeto ambigualmente descrito "existirá" quando pelo menos uma proposição como essa é verdadeira, isto é, quando há pelo menos uma proposição verdadeira da forma " x é um assim-assim", onde " x " é um nome. É característico das descrições ambíguas (em contraste com as definidas) o fato de poder haver inúmeras proposições verdadeiras da forma acima — Sócrates é um homem, Platão é um homem etc. Assim, "um homem existe" segue-se de Sócrates, Platão ou de quem quer que seja. No caso das descrições definidas, por outro lado, a forma correspondente da proposição, a saber, " x é o assim-assim" (onde " x " é um nome) só pode ser verdadeira para no máximo um valor de x . Isso nos leva ao assunto das descrições definidas, que devem ser definidas de modo análogo ao usado para as descrições ambíguas, porém mais complicado.

Atingimos agora o assunto principal do presente capítulo, a saber, a definição das palavras *o* ou *a* (sempre no singular). Um ponto muito importante a respeito da definição de "um assim-assim" aplica-se igualmente a "o assim-assim"; a definição buscada é uma definição de proposições nas quais esta frase ocorre, e não uma definição da própria frase, isoladamente. No caso de "um assim-assim", isso é razoavelmente óbvio: ninguém poderia supor que "um homem" seja um objeto definido, capaz de ser definido por si. Sócrates é um homem, Platão é um homem, Aristóteles é um homem, mas não podemos inferir que "um homem" signifique o mesmo que "Sócrates" significa e também o mesmo que "Platão" significa e também o mesmo que "Aristóteles" significa, porquanto esses três nomes têm significados diferentes. Não obstante, quando tivermos enumerado todos os homens do mundo, nada restará de que se possa dizer: "Este é um homem e não apenas isso, mas é o 'um homem', a entidade quintessencial que é apenas um homem indefinido sem ser quem quer que seja em particular". Naturalmente, é claro que, seja o que for que haja no mundo, é definido: se for um homem, será um homem definido e nenhum outro. Assim, não poderá haver uma entidade tal como "um homem" encontrável no mundo, em contraposição a homens específicos. E, conseqüentemente, é natural que não definamos "um homem" em si, mas apenas as proposições em que a expressão ocorra.

No caso de "o assim-assim" isso é igualmente verdadeiro, embora menos óbvio à primeira vista. Podemos demonstrar que

esse deve ser o caso, pela consideração da diferença entre um *nome* e uma *descrição definida*. Tomemos a proposição: "Scott é o autor de *Waverley*". Temos aqui um nome, "Scott", e uma descrição, "o autor de *Waverley*", que se asseire aplicarem-se à mesma pessoa. A distinção entre um nome e todos os outros símbolos pode ser assim explicada:

O nome é um símbolo simples cujo significado é algo que só pode ocorrer como sujeito, isto é, algo da espécie que definimos, no capítulo XIII, como um "indivíduo" ou um "particular". E um símbolo "simples" é aquele que não tem parte alguma que seja símbolos. Assim "Scott" é um símbolo simples, porque, conquanto tenha partes (a saber, letras separadas), essas partes não são símbolos. Por outro lado, "o autor de *Waverley*" não é um símbolo simples, porque as partes separadas que compõem a frase são partes que são símbolos. Se, como pode ser o caso, o que quer que *pareça* ser um "indivíduo" seja, realmente, capaz de mais análise, teremos de contentar-nos com o que pode ser chamado "indivíduos relativos", que serão termos que, em todo o contexto em questão, jamais são analisados e jamais ocorrem de qualquer outro modo que não como sujeitos. E nesse caso teremos, conseqüentemente, de contentar-nos com "nomes relativos". Do ponto de vista de nosso problema presente, a saber, o da definição de descrições, esse problema pode ser ignorado, quer se trate de nomes absolutos, quer de nomes relativos, porquanto diz respeito a estágios diferentes da hierarquia dos "tipos", enquanto temos de comparar pares como "Scott" e "o autor de *Waverley*", que se aplicam, ambos, ao mesmo objeto, e não levantar o problema dos tipos. Podemos, portanto, no momento, tratar os nomes como capazes de ser absolutos; nada do que teremos a dizer dependerá dessa suposição, mas o fraseado poderá ser um pouco reduzido por ela.

Temos, então, duas coisas a comparar: 1) um *nome*, que é um símbolo simples, designando diretamente um indivíduo que é o seu significado e tendo esse significado por seu próprio direito, independentemente dos significados de todas as outras palavras; 2) uma *descrição*, que consiste de várias palavras, cujos significados já estão fixados, e das quais resulta o que quer que seja tomado como "significado" da descrição.

Uma proposição contendo uma descrição não é idêntica ao que aquela proposição se torna quando o nome é substituído, até mesmo se o nome nomeia o mesmo objeto que a descrição descreve. "Scott é o autor de *Waverley*" é, obviamente, uma

proposição diferente de "Scott é Scott": a primeira é um fato na história literária e a segunda é um truismo trivial. E se colocarmos qualquer outro que não Scott no lugar de "o autor de *Waverley*", nossa proposição se torna falsa, portanto, não mais sendo, certamente, a mesma proposição. Mas, poder-se-á dizer, a nossa proposição é essencialmente da mesma forma que (digamos) "Scott é Sir Walter", em que se diz que dois nomes se aplicam à mesma pessoa. A resposta é que, se "Scott é Sir Walter" realmente significa "a pessoa chamada 'Scott' é a pessoa chamada 'Sir Walter'", então os nomes estão sendo usados como descrição: isto é, o indivíduo, em vez de ser nomeado, está sendo descrito como a pessoa que tem aquele nome. Essa é a maneira em que os nomes são freqüentemente usados na prática, e, via de regra, nada haverá na fraseologia a mostrar se estão sendo usados dessa maneira ou *como* nomes. Quando um nome é usado diretamente, meramente para indicar sobre o que estamos falando, ele não é parte alguma do *fato* asserido, ou da falsidade, se acontecer que a nossa asserção seja falsa: é meramente parte do simbolismo pelo qual expressamos o nosso pensamento. O que desejamos expressar é algo que possa (por exemplo) ser traduzido para uma língua estrangeira; é algo para o que as palavras reais são um veículo, mas do qual elas não são parte. Por outro lado, quando fazemos uma proposição sobre "a pessoa chamada 'Scott'", o nome real "Scott" entra no que estejamos asserindo e não apenas na linguagem usada na asserção. A nossa proposição será agora uma proposição diferente se substituirmos "Scott" por "a pessoa chamada 'Sir Walter'". Mas, enquanto usarmos os nomes *como* nomes, o fato de usarmos "Scott" ou dizermos "Sir Walter" é tão irrelevante para o que estamos asserindo quanto se falarmos os idiomas inglês ou francês. Assim, enquanto os nomes forem usados *como* nomes, "Scott é Sir Walter" é a mesma proposição trivial que "Scott é Scott". Isso completa a prova de que "Scott é o autor de *Waverley*" não é a mesma proposição que resulta da substituição de "o autor de *Waverley*" por um nome, não importando o nome empregado na substituição.

Quando usamos uma variável e falamos de uma função proposicional, digamos ϕx , o processo de aplicar enunciados gerais sobre x a casos particulares constituirá em substituir a letra " x " por um nome, admitindo-se que ϕ seja uma função que tem indivíduos para seus argumentos. Suponhamos, por exemplo, que ϕx seja "sempre verdadeira"; admitamos ainda, digamos, seja a "lei de identidade", $x=x$. Então, podemos

substituir qualquer nome que escolhamos por "x", obtendo sempre uma proposição verdadeira. Admitindo, por momentos, que "Sócrates", "Platão" e "Aristóteles" são nomes (uma suposição assaz precipitada), podemos inferir, a partir da lei de identidade, que Sócrates é Sócrates, Platão é Platão e Aristóteles é Aristóteles. Mas cometeremos uma falácia se tentarmos inferir, sem premissas adicionais, que o autor de *Waverley* é o autor de *Waverley*. Isso resulta do que acabamos de provar, isto é, que, se substituimos "o autor de *Waverley*" por um nome, em uma proposição, a proposição que obtemos é diferente. Equivale a dizer, aplicando o resultado ao nosso caso atual: Se "x" é um nome, " $x=x$ " não é a mesma proposição que "o autor de *Waverley* é o autor de *Waverley*", seja qual for o nome "x". Assim, não podemos inferir, do fato de toda proposição da forma " $x=x$ " ser verdadeira, sem mais cerimônias, que o autor de *Waverley* é o autor de *Waverley*. De fato, as proposições da forma "o assim-assim" não são sempre verdadeiras: é necessário que o assim-assim *exista* (termo este que será explicado dentro em pouco). É falso que o atual Rei da França seja o atual Rei da França, que o quadrado redondo seja o quadrado redondo. Quando substituímos um nome por uma descrição, as funções proposicionais que são "sempre verdadeiras" podem tornar-se falsas se a descrição nada descrever. Não há mistério algum nisso assim que nos apercebemos (o que foi provado no parágrafo precedente) de que quando substituímos uma descrição o resultado não é um valor da função proposicional em questão.

Estamos agora preparados para definir as proposições nas quais ocorre uma descrição definida. A única coisa que distingue "o assim-assim" de "um assim-assim" é a implicação de unicidade. Não podemos falar de "o habitante de Londres", porque o habitar de Londres é um atributo que não é único. Não podemos falar acerca de "o atual Rei da França", porque ele não existe; mas podemos falar acerca de "o atual Rei da Inglaterra".* Assim, as proposições sobre "o assim-assim" implicam sempre proposições correspondentes sobre "um assim-assim", com o adendo de que não há mais de um assim-assim. Uma proposição como "Scott é o autor de *Waverley*" não poderia ser verdadeira se

* Este livro foi publicado pela primeira vez em 1919, quando a Inglaterra tinha um Rei — Jorge V. Hoje em dia (1973) não se poderia também dizer "o atual Rei da Inglaterra", porque tal não existe. (N. do T.)

Waverley jamais tivesse sido escrito, ou se várias pessoas o tivessem escrito; também não o poderia qualquer outra proposição resultante de uma função proposicional x pela substituição de "x" por "o autor de *Waverley*". Podemos dizer que "o autor de *Waverley*" significa "o valor de x para o qual 'x escreveu *Waverley*' é verdadeira". Assim, por exemplo, a proposição "o autor de *Waverley* era escocês" envolve:

- 1) "x escreveu *Waverley*" não é sempre falsa;
- 2) "se x e y escreveram *Waverley*, x e y são idênticos" é sempre verdadeira;
- 3) "se x escreveu *Waverley*, x era escocês" é sempre verdadeira.

Essas três proposições, traduzidas para a linguagem ordinária, dizem:

- 1) pelo menos uma pessoa escreveu *Waverley*;
- 2) no máximo uma pessoa escreveu *Waverley*;
- 3) quem quer que tenha escrito *Waverley* era escocês.

Todas essas três proposições são implicadas por "o autor de *Waverley* era escocês". Inversamente, as três juntas (mas não apenas duas delas) implicam que o autor de *Waverley* era escocês. Portanto, as três juntas, podem ser tomadas como definindo o que se quer dizer pela proposição "o autor de *Waverley* era escocês". Podemos, de um certo modo, simplificar essas três proposições. A primeira e a segunda conjuntamente são equivalentes a: "Há um termo c tal que 'x escreveu *Waverley*' é verdadeira quando x é c e falsa quando x não é c ". Em outras palavras, "Há um termo c tal que 'x escreveu *Waverley*' é sempre equivalente a ' x é c '". (Duas proposições são "equivalentes" quando ambas são verdadeiras ou ambas são falsas.) Temos aqui, para começar, duas funções de x , "x escreveu *Waverley*" e " x é c ", e formemos uma função de c considerando a equivalência dessas duas funções de x para todos os valores de x ; asserimos, então, que a função resultante de c é "algumas vezes verdadeira", isto é, que é verdadeira para pelo menos um valor de c . (Obviamente não pode ser verdadeira para mais de um valor de c .) Essas duas condições são, juntas, definidas como dando o significado de "o autor de *Waverley* existe".

Podemos agora definir “o termo que satisfaz a função ϕx existe”. Esta é a forma geral da qual a forma acima é um caso particular. “O autor de *Waverley*” é “o termo que satisfaz a função ‘ x escreveu *Waverley*’”. E “o assim-assim” envolverá sempre referência a alguma função proposicional, a saber, a que define a propriedade que torna uma coisa um assim-assim.

A nossa definição é como se segue:

“O termo que satisfaz a função ϕx existe” significa:

“Há um termo c tal que ϕx é sempre equivalente a ‘ x é c ’”.

Para definir “o autor de *Waverley* era escocês”, temos ainda de levar em conta a terceira de nossas três proposições, a saber, “Quem quer que tenha escrito *Waverley* era escocês”. Esta proposição será satisfeita meramente acrescentando-se que o c em questão tem de ser escocês. Assim, “o autor de *Waverley* era escocês” é:

“Há um termo c tal que 1) ‘ x escreveu *Waverley*’ é sempre equivalente a ‘ x é c ’, 2) c é escocês”.

E, de modo geral, “o termo que satisfaz ϕx satisfaz ψx ” é definido como significando:

“Há um termo c tal que 1) ϕx sempre equivalente a ‘ x é c ’, 2) ψx é verdadeira”.

Essa é a definição de proposições em que ocorrem descrições.

É possível saber-se muito a respeito de um termo descrito, isto é, conhecer-se muitas proposições relativas a “o assim-assim”, sem que se saiba realmente o que seja o assim-assim, isto é, sem que se conheça qualquer proposição da forma “ x é o assim-assim”, onde “ x ” é um nome. Em uma novela policial, as proposições sobre “o homem que cometeu o crime” são acumuladas, na esperança de que finalmente bastem para demonstrar que foi A que o cometeu. Podemos até ir ao ponto de dizer que, em todos os conhecimentos que podem ser expressados por palavras — com a exceção de “isso” e “aquilo” e de algumas outras palavras cujo significado varia em diversas ocasiões — nenhum nome, no sentido estrito, ocorre, e que, o que parece ser nomes, constitui, na realidade, descrições. Podemos discutir significativamente sobre se Homero existiu, coisa que não poderíamos fazer se “Homero” fosse um nome. A proposição “o assim-assim existe” é significativa, seja ela verdadeira ou falsa; mas se a é o assim-

-assim (onde “ a ” é um nome), as palavras “ a existe” são sem significado. Só se pode asserir significativamente a existência de descrições, sejam elas definidas ou indefinidas; pois, se “ a ” é um nome, ele tem de nomear alguma coisa: o que, não nomeia coisa alguma não é um nome, e, portanto, caso se proponha a ser nome, será um símbolo vazio de significado, enquanto uma descrição, como “o atual Rei da França”, não se torna incapaz de ocorrer significativamente meramente baseado em que não descreve coisa alguma, isso porque se trata de um símbolo *complexo*, cujo significado é derivado a partir dos significados dos símbolos constituintes dele. E assim, quando perguntamos se Homero existiu, estamos usando a palavra “Homero” como uma descrição abreviada: podemos substituí-la por (digamos) “o autor da *Iliada* e da *Odisséia*”. As mesmas considerações se aplicam a quase todos os usos do que pareça um nome próprio.

Quando ocorrem descrições nas proposições, é necessário distinguir entre o que pode ser chamado ocorrência “primária” e ocorrência “secundária”. A distinção abstrata se faz como se segue: Uma descrição tem uma ocorrência “primária” quando a proposição em que ocorre resulta da substituição de “ x ” pela descrição de alguma proposição funcional ϕx ; uma descrição tem uma ocorrência “secundária” quando o resultado da substituição de “ x ” pela descrição em ϕx dá apenas *parte* da proposição considerada. Um exemplo esclarecerá o assunto. Considere-se “o atual Rei da França é calvo”. Aqui “o atual Rei da França” tem uma ocorrência primária, e a proposição é falsa. Toda proposição na qual uma descrição que nada descreve tem uma ocorrência primária é falsa. Mas considere-se agora “o atual Rei da França não é calvo”. Trata-se de proposição ambígua. Se tomarmos primeiro “ x é calvo” e substituirmos depois “ x ” por “o atual Rei da França”, negando a seguir o resultado, a ocorrência de “o atual Rei da França” é secundária e nossa proposição é verdadeira; mas se tomarmos “ x não é calvo” e substituirmos “ x ” por “o atual Rei da França”, então “o atual Rei da França” tem uma ocorrência primária e a proposição é falsa. A confusão entre ocorrência primária e ocorrência secundária é uma fonte imediata de falácias no que tange às descrições.

As descrições ocorrem em Matemática principalmente sob a forma de *funções descritivas*, isto é, de “o termo que tem a relação R com y ”, ou “o R de y ”, como podemos dizer, analogamente a “o pai de y ” e frases semelhantes. Dizer “o pai de y é rico”, por exemplo, equivale a dizer que a seguinte função

proposicional de c : " c é rico e ' x gerou y ' é sempre equivalente a ' x é c ' é algumas vezes verdadeira", isto é, é verdadeira para pelo menos um valor de c . Ela não pode, obviamente, ser verdadeira para mais de um valor.

A teoria das descrições, ligeiramente esboçada no presente capítulo, é da mais alta importância tanto em Lógica como na teoria do conhecimento. Mas, para fins matemáticos, as partes mais filosóficas da teoria não são essenciais, tendo sido, portanto, omitidas na apreciação acima, a qual foi limitada aos mínimos requisitos matemáticos.

CAPÍTULO XVII

Classes

N O PRESENTE CAPÍTULO, consideraremos os artigos *os*, *as* (sempre no plural): os habitantes de Londres, os filhos de ricos, e assim por diante. Em outras palavras, trataremos das *classes*. Vimos, no capítulo II, que um número cardinal deve ser definido como uma classe de classes, e, no capítulo III, que o número 1 deve ser definido como a classe de todas as classes unitárias, isto é, de todas que têm apenas um membro, como diríamos, não fosse o círculo vicioso. Naturalmente, quando o número 1 é definido como a classe de todas as classes unitárias, "classes unitárias" devem ser definidas de forma que não admita saibamos o que significa "um"; na verdade, elas são definidas de modo estreitamente análogo ao usado para as descrições, a saber: Diz-se que uma classe α é uma classe "unitária" se a função proposicional " x é um α " é sempre equivalente a " x é c " (considerada como uma função de c) não é sempre falsa, isto é, em linguagem mais comum, se há um termo c tal que x será um membro de α quando x é c , mas não de outro modo. Isso nos dá uma definição de classe unitária se já sabemos o que seja uma classe em geral. Até então, ao tratarmos de Aritmética, tratamos de "classe" como uma idéia primitiva. Mas, pelos motivos apresentados no capítulo XIII, se não por outros, não podemos aceitar "classe" como uma idéia primitiva. Devemos buscar uma definição no mesmo molde que o da definição de descrições, isto é, uma definição que assinale um significado a proposições em cuja expressão verbal ou simbólica ocorram palavras ou símbolos aparentemente representando classes, mas que assinale um significado que elimine completamente toda menção a classes a partir de uma análise correta de tais proposições. Estaremos então capacitados a dizer que os símbolos de classes são meras conveniências, não representando objetos chamados

"classes", e que as classes são, de fato, como as descrições, ficções lógicas, ou (como dizemos) "símbolos incompletos".

A teoria das classes é menos completa do que a teoria das descrições e há razões (que apresentaremos em esboço) para não se considerar finalmente satisfatória a definição de classes que será sugerida. Parece necessária mais alguma sutileza; mas as razões para se considerar a definição que será apresentada como aproximadamente correta e em linhas certas são irresistíveis.

A primeira coisa é perceber-se o porquê de as classes não poderem ser consideradas parte do equipamento último do mundo. É difícil explicar precisamente o que se quer dizer com esse enunciado, mas uma consequência nele implicada pode ser usada para elucidar seu significado. Se tivéssemos uma linguagem simbólica completa, como uma definição para toda coisa definível e um símbolo não-definido para toda coisa indefinível, os símbolos não-definidos dessa linguagem representariam simbolicamente o que quero dizer por "o equipamento último do mundo". Sustento que nenhum símbolo, seja para "classe" em geral ou para classes em particular, seja incluído nesse aparato de símbolos não-definidos. Por outro lado, todas as coisas particulares que existem no mundo deveriam ter nomes que seriam incluídos entre os símbolos não-definidos. Podemos tentar evitar essa conclusão pelo uso de descrições. Tomemos (digamos) "a última coisa que César viu antes de morrer". Isso é uma descrição de algum particular; podemos usar essa descrição (em um sentido perfeitamente legítimo) como uma *definição* daquele particular. Mas se "*a*" é um nome para o mesmo particular, uma proposição em que "*a*" ocorra não é (como vimos no capítulo precedente) idêntica ao que essa proposição se torna quando substituímos "*a*" por "a última coisa que César viu antes de morrer". Se a nossa linguagem não contém o mesmo "*a*", ou algum outro nome para o mesmo particular, não teremos meio de expressar a proposição que expressamos por meio de "*a*" em contraposição à que expressamos por meio da descrição. Assim, as descrições não possibilitariam uma linguagem perfeita para se prescindir de nomes para todos os particulares. A esse respeito, sustento, as classes diferem dos particulares e não necessitam ser representadas por símbolos não-definidos. Nossa primeira medida é dar as razões para essa opinião.

Já vimos que as classes não podem ser consideradas espécies de indivíduos, devido à contradição sobre as classes que não são membros de si mesmas (explicado no capítulo XIII) e porque

podemos provar que o número de classes é maior do que o número de indivíduos.

Não podemos considerar as classes de modo extensional *puro* simplesmente como montes ou conglomerados. Se tentássemos fazê-lo constataríamos ser impossível entender como pode haver uma classe como a classe nula, que não tem membro algum, não podendo ser considerada um "monte"; também teríamos muita dificuldade em compreender como uma classe que só tem um membro não é idêntica a esse membro. Não me proponho asserir ou negar que haja entidades como "montes". Como lógico matemático, não sou chamado a opinar sobre esse ponto. Tudo o que sustento é que, se há montes, não os podemos identificar com as classes compostas de seus constituintes.

Aproximar-nos-emos muito mais de uma teoria satisfatória se tentarmos identificar as classes com as funções proposicionais. Como explicamos no capítulo II, toda classe é definida por alguma função proposicional que é verdadeira para os membros da classe e falsa com relação a outras coisas. Mas, se uma classe pode ser definida por uma função proposicional, pode ser igualmente bem definida por qualquer outra que seja verdadeira quando a primeira for verdadeira e falsa quando a primeira for falsa. Por essa razão a classe não pode ser mais identificada com esta função proposicional, como também com nenhuma outra — e, dada uma função proposicional, há sempre muitas outras que são verdadeiras quando ela é verdadeira e falsa quando ela é falsa. Dizemos que duas funções proposicionais são "formalmente equivalentes" quando isso acontece. Duas *proposições* são "equivalentes" quando ambas são verdadeiras ou ambas são falsas; duas funções proposicionais ϕx e ψx são "formalmente equivalentes" quando ϕx é sempre equivalente a ψx . É o fato de haver outras funções formalmente equivalentes a uma função dada o que impossibilita identificar uma classe com uma função; pois desejamos que as classes sejam tais que não haja duas classes de classes distintas tendo exatamente os mesmos membros, e, portanto, duas funções formalmente equivalentes terão de determinar a mesma classe.

Depois de termos decidido que as classes não podem ser coisas da mesma espécie que os seus membros, que não podem ser apenas montes ou agregados e também que não podem ser identificadas com funções proposicionais, torna-se muito difícil vermos o que elas podem ser, caso sejam mais do que ficções simbólicas. E se pudermos encontrar algum meio de lidar com

elas como ficções simbólicas, aumentaremos a segurança lógica de nossa posição, porquanto evitamos a necessidade de admitir que haja classes sem termos compelidos a fazer a suposição oposta de que não há classes. Nós meramente nos abstermos de ambas as suposições. Isso é um exemplo da navalha de Occam, a saber, "as entidades não devem ser multiplicadas sem necessidade". Mas quando nos negamos a asserir que há classes, não se deve supor estejamos asserindo dogmaticamente que não há classe alguma. Somos meramente agnósticos a respeito delas; como Laplace, podemos dizer que "*je n'ai pas besoin de cette hypothèse*".

Estabeleçamos as condições que um símbolo deve preencher para que sirva como uma classe. Penso que se constatará serem as seguintes condições necessárias e suficientes:

1) Toda função proposicional deve determinar uma classe, consistindo daqueles argumentos para os quais a função é verdadeira. Dada qualquer proposição (verdadeira ou falsa), digamos sobre Sócrates, podemos imaginar Sócrates substituído por Platão ou por Aristóteles ou por um gorila ou pelo homem da Lua ou por qualquer outro indivíduo do mundo. Em geral, algumas dessas substituições darão uma proposição verdadeira e alguma falsa. A classe determinada consistirá de todas as substituições que dão uma proposição verdadeira. Naturalmente, ainda temos de decidir o que queremos dizer por "todas as que, etc." Tudo o que estamos observando no momento é que uma classe é tornada determinada por uma função proposicional e que toda função proposicional determina uma classe apropriada.

2) Duas funções formalmente equivalentes devem determinar a mesma classe, e duas que não são formalmente equivalentes devem determinar classes diferentes. Isto é, uma classe é determinada por seus membros, não podendo duas classes diferentes ter os mesmos membros. (Se uma classe é determinada por uma função ϕx , dizemos que a é um "membro" da classe se ϕa for verdadeira.)

3) Devemos encontrar algum meio de definir não apenas classes, mas também classes de classes. Vimos no capítulo II que os números cardinais devem ser definidos como classes de classes. A frase comum da Matemática elementar, "a combinação de n coisas a m em certo tempo", representa uma classe de classes, a saber, a classe de todas as classes de m termos que podem ser selecionados de uma dada classe de n termos. Sem

algum método simbólico de lidar com classes de classes, a Lógica matemática ruiria.

4) Será sob todas as circunstâncias sem significado (não falso) supor-se que uma classe seja ou que ela não seja um membro de si mesma. Isso resulta da contradição que discutimos no capítulo XIII.

5) Finalmente — e esta é a condição mais difícil de ser preenchida — deve ser possível fazer proposições sobre *todas* as classes que são compostas de indivíduos, ou sobre *todas* as classes que são compostas de objetos de qualquer "tipo" lógico. Se assim não fosse, muitos usos das classes iriam à garra — por exemplo, a indução matemática. Ao definir a posteridade de um determinado termo, necessitamos de estar capacitados a dizer que um membro da posteridade pertence a *todas* as classes hereditárias a que pertence o termo dado, e isso exige o gênero de totalidade que está em questão. A razão para que haja uma dificuldade em torno desta questão está em se poder provar ser impossível falar-se de *todas* as funções proposicionais que podem ter argumentos de um dado tipo.

Ignoraremos, para começar, esta última condição e os problemas que ela cria. As duas primeiras condições podem ser consideradas juntas. Elas enunciam que deve haver uma classe, nem mais nem menos, para cada grupo formalmente equivalente de funções proposicionais; e.g., a classe dos homens tem de ser a mesma que a dos bípedes implumes, ou dos animais racionais, ou dos *yahoos* ou de seja qual for a característica preferida para definir um ser humano. Mas, quando dizemos que duas funções proposicionais formalmente equivalentes poderão não ser idênticas, embora definam a mesma classe, podemos provar a verdade da asserção mostrando que um enunciado pode ser verdadeiro de uma função e falso de outra; e.g., "creio que todos os homens são mortais" pode ser verdadeira, enquanto que "creio que todos os animais racionais são mortais" possa ser falsa, porquanto posso acreditar falsamente que Fênix seja um animal racional imortal. Assim, somos levados a considerar *enunciados sobre funções*, ou (mais corretamente) *funções de funções*.

Algumas das coisas que podem ser ditas sobre uma função podem ser consideradas como sendo ditas sobre a classe definida pela função, enquanto outras não o podem. O enunciado "todos os homens são mortais" envolve as funções " x é humano" e " x é mortal"; ou, se preferirmos, poderemos dizer que ela envolve as classes *homens* e *mortais*. Podemos interpretar o

enunciado de qualquer uma dessas maneiras, porque o seu valor-de-verdade é inalterado se substituirmos " x é humano" ou " x é mortal" por qualquer função formalmente equivalente. Mas, como acabamos de ver, o enunciado "creio que todos os homens são mortais" não pode ser considerado como sendo a respeito da classe determinada por qualquer dessas funções, porque o seu valor-de-verdade pode ser alterado pela substituição por uma função formalmente equivalente (o que deixa a classe inalterada). Chamaremos a um enunciado envolvendo a função ϕx uma função "extensional" da função ϕx se ela for semelhante a "todos os homens são mortais", isto é, se o seu valor-de-verdade permanecer inalterado pela substituição por qualquer função formalmente equivalente; e quando uma função de uma função não for extensional nós a chamaremos "intensional", de forma que "creio que todos os homens são mortais" é uma função intensional de " x é humano" ou " x é mortal". Assim, as funções *extensionais* de uma função x podem, para fins práticos, ser considerados funções da classe determinada por x , enquanto as funções *intensionais* não podem ser assim consideradas.

Cabe observar que todas as funções de funções *específicas* que temos ocasião de introduzir em Lógica Matemática são extensionais. Assim, por exemplo, as duas funções de funções fundamentais são: " ϕx é sempre verdadeira" e " ϕx é algumas vezes verdadeira". Cada uma delas tem o seu valor-de-verdade inalterado se ϕx é substituída por qualquer função formalmente equivalente. Na linguagem de classes, se α é a classe determinada por ϕx , " ϕx é sempre verdadeira" é equivalente a "tudo é membro de α ", e " ϕx é algumas vezes verdadeira" é equivalente a " α tem membros" ou (melhor ainda) " α tem pelo menos um membro". Consideremos, ainda, a condição de que tratamos no capítulo precedente, para a existência de "o termo que satisfaz ϕx ". A condição é que haja um termo c tal que ϕx seja sempre equivalente a " x é c ". Trata-se, obviamente, de uma função extensional. É equivalente à asserção de que a classe definida pela função ϕx é a classe unitária, isto é, a classe que tem um membro; em outras palavras, uma classe que é um membro de 1.

Dada uma função de uma função que pode ser ou não ser extensional, podemos sempre derivar dela uma função conexa e certamente extensional da mesma função, pelo seguinte plano: Admitamos que a nossa função de uma função original seja tal que atribua a ϕx a propriedade f ; consideremos depois a asserção "há uma função com a propriedade f e formalmente equivalente

a ϕx ". Trata-se de uma função extensional de ϕx ; é verdadeira quando o nosso enunciado original é verdadeiro, e é formalmente equivalente à função original de ϕx se esta função original é extensional; mas quando a função original é intensional, a função nova é mais freqüentemente verdadeira do que a antiga. Por exemplo, consideremos novamente "creio que todos os homens são mortais", considerada como uma função de " x é humano". A função extensional derivada é: "Há uma função formalmente equivalente a ' x é humano' e tal que creio que o que a satisfizer é mortal". Essa função permanece verdadeira quando substituirmos " x é humano" por " x é um animal racional", ainda que eu acredite falsamente que Fênix seja racional e imortal.

Damos o nome de "função extensional derivada" à função construída do modo acima, a saber, à função: "Há uma função com a propriedade f e formalmente equivalente a ϕx ", onde a função original era "a função ϕx tem a propriedade f ".

Podemos considerar a função extensional derivada como tendo para seu argumento a classe determinada pela função ϕx , e como asserindo f dessa classe. Isso pode ser tomado como a definição de uma proposição sobre uma classe. Isto é, podemos definir:

Asserir que "a classe determinada pela função ϕx tem a propriedade f " é assereir que ϕx satisfaz a função extensional derivada de f .

Isso dá um significado a qualquer enunciado sobre uma classe que possa ser feita significativamente sobre uma função; e constatar-se-á que, tecnicamente, acarreta os resultados exigidos para tornar uma teoria simbolicamente satisfatória.*

O que acabamos de dizer relativamente à definição de classes é suficiente para satisfazer às nossas primeiras quatro condições. A maneira pela qual garante a terceira e a quarta, a saber, a possibilidade de classes de classes e a impossibilidade de uma classe ser ou não ser membro de si mesma, é algo técnica; é explicada em *Principia Mathematica*, mas pode ser aqui tomada como algo estabelecido. Resulta que, a não ser pela nossa quinta condição, podemos considerar a nossa tarefa acabada. Mas essa condição — a mais importante e a mais difícil — não é preenchida em virtude do que quer que tenhamos dito até agora. A

* Ver *Principia Mathematica*, vol. I, pp. 75-84 e * 20.

dificuldade está relacionada com a teoria dos tipos, devendo ser ligeiramente discutida.*

Vimos no capítulo XIII que há uma hierarquia de tipos lógicos, e que constitui uma falácia permitir que um objeto pertencente a um desses tipos possa ser substituído por um objeto pertencente a outro. Mas não é difícil mostrar que as várias funções que podem ter um objeto a como argumento não são todas do mesmo tipo. Chamamo-las todas a -funções. Podemos tomar primeiro aquelas entre elas que não envolvem referência a qualquer coleção de funções; e estas chamaremos " a -funções predicativas". Se passarmos agora às funções que envolvem referência à totalidade de a -funções predicativas, incorreremos em uma falácia caso as consideremos do mesmo tipo que a -funções predicativas. Tomemos um enunciado cotidiano como " a é um francês típico". Como definiremos um francês "típico"? Podemos defini-lo como aquele que "possui todas as qualidades possuídas pela maioria dos franceses". Mas a menos que limitemos "todas as qualidades" àquelas que não envolvam referência a qualquer totalidade de qualidades, teremos de observar que a maioria dos franceses *não* são típicos no sentido acima, e, portanto, a definição mostra que não ser típico é essencial a um francês típico. Não se trata de uma contradição lógica, porquanto não há razão alguma para que haja qualquer francês típico; mas ilustra a necessidade de separar as qualidades que envolvem referência a uma totalidade de qualidades das que não a envolvem.

Sempre que, por enunciados sobre "todos" ou "alguns" dos valores que uma variável pode assumir significativamente, geramos um novo objeto, esse novo objeto não deve estar entre os valores que a nossa variável anterior poderia assumir, porquanto, caso contrário, a totalidade de valores que poderia ser percorrida pela variável só seria definível em termos de si mesma e estaríamos envolvidos em um círculo vicioso. Por exemplo, se eu digo que "Napoleão tinha todas as qualidades que fazem um grande general", devo definir "qualidades" de tal maneira que não incluam o que ora estou dizendo, isto é, "ter todas as qualidades que fazem um grande general" não deve ser em si uma qualidade no sentido suposto. Isso é bastante óbvio e constitui o princípio que leva à teoria dos tipos pela qual os

paradoxos dos círculos viciosos são evitados. Quanto à aplicação às a -funções, podemos supor que "qualidades" devam significar "funções predicativas". Então, quando digo que "Napoleão tinha todas as qualidades etc.", quero dizer que "Napoleão satisfaz todas as funções predicativas etc.". Esse enunciado atribui uma propriedade a Napoleão, mas não uma propriedade predicativa; fugimos assim ao círculo vicioso. Mas sempre que ocorre a expressão "todas as funções que", as funções em questão devem ser limitadas a um tipo para que se evite um círculo vicioso; e, como Napoleão e o francês típico mostraram, o tipo não fica determinado pelo do argumento. Seria necessária uma discussão muito mais completa para se apresentar plenamente esse ponto, mas o que foi dito poderá bastar para esclarecer que as funções que podem ter um argumento dado são de uma série infinita de tipos. Poderíamos, por meio de vários dispositivos técnicos, construir uma variável que percorresse os primeiros n desses tipos, onde n é finito, mas não podemos construir uma variável que percorra todos eles, e, se o pudéssemos, esse mero fato geraria de imediato um novo tipo de função com os mesmos argumentos e poria todo o processo novamente em marcha.

Chamamos às a -funções predicativas o *primeiro* tipo de a -funções; a -funções envolvendo referência à totalidade do primeiro tipo chamamos o *segundo* tipo, e assim por diante. Nenhuma a -função variável pode percorrer todos esses tipos diferentes: deverá parar logo em algum tipo definido.

Essas considerações são relevantes para nossa definição da função extensional derivada. Falamos de "uma função formalmente equivalente a ϕx ". É necessário decidir sobre o tipo de função. Qualquer decisão servirá, mas alguma decisão é inevitável. Chamemos ψ à suposta função formalmente equivalente. Então, ψ aparece como uma variável e deve ser de algum tipo determinado. Tudo o que sabemos necessariamente sobre o tipo de ϕ é que admite argumentos de um determinado tipo — que é (digamos) uma a -função. Mas isso, como vimos há pouco, não determina o seu tipo. Para que estejamos capacitados (como o exige o nosso quinto requisito) a lidar com *todas* as classes cujos membros são do mesmo tipo que a , devemos ser capazes de definir todas essas classes por meio de funções de algum tipo; equivale a dizer, deve haver algum tipo de a -função, digamos n° tal que qualquer a -função seja formalmente equivalente a alguma a -função do n° tipo. Se tal for o caso, então qualquer função extensional que se verifique para todas as

* O leitor que desejar uma discussão mais completa deverá consultar *Principia Mathematica*, Introdução, cap. II; também * 12.

α -funções de n° tipo se verificará para qualquer α -função que seja. É principalmente como um meio técnico de corporificar uma suposição conducente a esse resultado que as classes são úteis. A suposição é chamada "axioma da redutibilidade" e pode ser assim enunciada:

"Há um tipo (digamos, τ) de α -funções tal que, dada qualquer α -função, ela é formalmente equivalente a alguma função do tipo em questão".

Se esse axioma é admitido, usamos funções desse tipo para definir as nossas funções extensionais associadas. Os enunciados sobre todas as α -classes (isto é, todas as classes definidas por α -funções) podem ser reduzidas a enunciados sobre todas as α -funções do tipo τ . Enquanto estiverem envolvidas apenas funções de funções extensionais, isso nos dá na prática resultados que de outro modo exigiriam a impossível noção de "todas as α -funções". Uma região particular onde isso é vital é a da indução matemática.

O axioma da redutibilidade envolve tudo o que é realmente essencial na teoria das classes. Portanto, vale a pena perguntar se há alguma razão para se supor seja verdadeiro.

Esse axioma, como o axioma multiplicativo, e o axioma da infinidade, é necessário para certos resultados, mas não para a simples existência do raciocínio dedutivo. A teoria da dedução, conforme explicada no capítulo XIV, e as leis para as proposições envolvendo "todos" e "alguns", são, da própria textura do raciocínio matemático: sem elas, ou algo semelhante a elas, não apenas não obteríamos os mesmos resultados, mas não obteríamos resultado algum. Não as podemos usar como hipóteses e deduzir conseqüências hipotéticas, pois elas são tanto regras de dedução como premissas. Elas devem ser absolutamente verdadeiras, ou então o que deduzimos de acordo com elas, nem mesmo se seguiria das premissas. Por outro lado, o axioma da redutibilidade, como nossos dois axiomas matemáticos anteriores, poderia perfeitamente bem ser enunciado como uma hipótese onde quer que usado, em vez de se admitir seja realmente verdadeiro. Podemos deduzir suas conseqüências hipoteticamente; podemos também deduzir as conseqüências de supô-lo falso. É, portanto, apenas conveniente e não necessário. E, em vista da complicação da teoria dos tipos e da incerteza de tudo exceto seus princípios mais gerais, é impossível até agora dizer se não poderá haver algum modo de prescindir totalmente do axioma da redutibilidade. Contudo, admitindo-se a cor-

reção da teoria acima esboçada, que poderemos dizer sobre a verdade ou a falsidade do axioma?

O axioma, como podemos observar, é uma forma generalizada da identidade dos indiscerníveis, de Leibniz. Ele admitiu, como um princípio lógico, que dois sujeitos diferentes devem diferir no tocante aos predicados. Mas os predicados são apenas alguns entre os que chamamos "funções predicativas", as quais incluirão também relações entre termos dados e várias propriedades que não devem ser levadas em conta como predicados. Assim a suposição de Leibniz é muito mais estrita e estreita do que a nossa. (Não, naturalmente, de acordo com a *sua* lógica, que considerava *todas* as proposições como relutáveis à forma sujeito-predicado.) Mas não há boa razão alguma para se acreditar na sua forma, ao que eu veja. Poderá muito bem haver, como uma questão de possibilidade lógica abstrata, duas coisas que tenham exatamente os mesmos predicados, no sentido estreito em que vivos usando a palavra "predicado". Como se apresentará o nosso axioma se passarmos além dos predicados nesse sentido estreito? Não parece haver, no mundo real, modo algum de duvidar de sua verdade empírica no tocante aos particulares, em razão da diferenciação espaço-temporal: não há dois particulares tendo exatamente as mesmas relações espaciais e temporais com todos os outros particulares. Mas isso é, por assim dizer, um acidente, um fato sobre o mundo no qual acontece nos encontrarmos. A Lógica pura e a Matemática pura (que é a mesma coisa) visam a serem verdadeiras, na fraseologia leibniziana, em todos os mundos possíveis, não apenas neste mundo desordenado em que o acaso nos aprisionou. Há uma certa fidalguia que o lógico deve preservar: ele não deve condescender em derivar argumentos das coisas que vê ao seu redor.

Encarado desse ponto de vista estritamente lógico, não vejo qualquer razão para acreditar que o axioma da redutibilidade seja logicamente necessário, que é o que se quereria dizer ao se afirmar que ele é verdadeiro em todos os mundos possíveis. A admissão deste axioma em um sistema de lógica é, portanto, um defeito, ainda que o axioma seja empiricamente verdadeiro. É por essa razão que a maioria das classes não pode ser considerada tão completa quanto a teoria das descrições. Há a necessidade de se trabalhar ainda mais a teoria dos tipos, na esperança de se chegar a uma doutrina das classes que não exija essa dúbia suposição. Mas é razoável considerar-se a teoria

esboçada no presente capítulo certa em suas linhas principais, isto é, em sua redução de proposição nominalmente sobre classes a proposições sobre suas funções definidoras. Evitar classes como entidades por esse método deve, pareceria, ser seguro em princípio, embora o detalhe ainda exija ajuste. É pelo fato de isso parecer inevitável que incluímos a teoria das classes, a despeito de nosso desejo de excluir, no quanto possível, o que parecesse aberto a sérias dúvidas.

A teoria das classes, acima esboçada, reduz-se a um axioma e a uma definição. A bem da delimitação, nós a repetimos aqui. O axioma é:

Há um tipo τ tal que se ϕ é uma função que pode admitir um objeto dado a como argumento, então há uma função ψ do tipo τ que é formalmente equivalente a ϕ .

A definição é:

Se ϕ é uma função que pode admitir um objeto dado a como argumento, e τ o tipo mencionado no axioma acima, então dizer que a classe determinada por ϕ tem a propriedade f é dizer que há uma função do tipo τ formalmente equivalente a ϕ , tendo a propriedade f .

CAPÍTULO XVIII

Matemática e Lógica

A MATEMÁTICA E A LÓGICA foram, historicamente falando, estudos inteiramente distintos. A Matemática esteve relacionada com a ciência e a Lógica com o idioma grego. Mas ambas se desenvolveram nos tempos modernos e a Lógica tornou-se mais Matemática e a Matemática tornou-se mais Lógica. A consequência é que se tornou agora inteiramente impossível traçar uma linha entre as duas; de fato, as duas são uma. Diferem entre si como rapaz e homem: a Lógica é a juventude da Matemática e a Matemática é a maturidade da Lógica. Esse ponto de vista é mal aceito pelos lógicos, que tendo passado a vida no estudo dos textos clássicos, são incapazes de acompanhar um pedaço de raciocínio simbólico, e pelos matemáticos que aprenderam uma técnica sem se darem ao trabalho de indagar sobre o seu significado ou justificativa. Ambos os tipos estão agora felizmente ficando mais raros. Tanto o trabalho matemático moderno se encontra obviamente na fronteira da Lógica, quanto a Lógica moderna é simbólica e formal, que a relação muito estreita em Lógica e Matemática tornou-se óbvia para todo estudante instruído. A prova de sua identidade é, naturalmente, uma questão de detalhe: começando com as premissas que seriam universalmente admitidas como pertencentes à Lógica, e chegando, por dedução, a resultados que de modo igualmente óbvio pertencem à Matemática, constatamos não haver um ponto pelo qual possa ser traçada uma linha distinta, separando a Lógica à esquerda e a Matemática à direita. Se ainda houver os que não admitem a identidade entre Lógica e Matemática, podemos desafiá-los a indicar em que ponto, nas definições e deduções sucessivas de *Principia Mathematica*, consideram que a Lógica termina e a Matemática principia. Será então óbvio que qualquer resposta terá de ser assaz arbitrária.

Nos capítulos iniciais deste livro, começando com os números naturais, definimos primeiro os “números cardinais” e mostramos como generalizar a concepção de número, analisando então os conceitos envolvidos na definição, até que nos surpreendemos lidando com os fundamentos da Lógica. Em um tratamento sintético, dedutivo, esses fundamentos vêm primeiro, e os números naturais só são atingidos após longa jornada. Tal tratamento, conquanto formalmente mais concreto do que o que adotamos, é mais difícil para o leitor, porque os conceitos e proposições lógicos últimos com que começa são remotos e não familiares, em comparação com os números naturais. Também, eles representam a atual fronteira do conhecimento, além da qual está o ainda desconhecido; e o domínio do conhecimento sobre eles ainda não está bem seguro.

Costumava-se dizer que a Matemática é a ciência da “quantidade”. “Quantidade” é uma palavra vaga, mas, para argumentar, podemos substituí-la pela palavra “número”. O enunciado de que a Matemática é a ciência do número seria não-verdadeiro de dois modos diferentes. Por um lado, há ramos reconhecidos da Matemática que nada têm a ver com o número — toda a Geometria que não usa coordenadas ou medição, por exemplo: a Geometria Projetiva e Descritiva, até o ponto em que são introduzidas coordenadas, nada tem a ver com número, ou mesmo com quantidade, no sentido de *maior* e *menor*. Por outro lado, tornou-se possível, por meio da definição de cardinais, pela teoria da indução e pelas relações ancestrais, pela teoria geral das séries, e pelas definições de operações aritméticas, generalizar muito do que costumava ser provado somente em conexão com os números. O resultado é que o que era anteriormente o estudo exclusivo da Aritmética tornou-se agora dividido em vários estudos separados, nenhum dos quais especialmente ligado aos números. As propriedades mais elementares dos números estão ligadas às relações de um-para-um e à similaridade entre classes. A adição está ligada à construção de classes mutuamente exclusivas respectivamente similares a um conjunto de classes que não se sabe serem mutuamente exclusivas. A multiplicação é fundida com a teoria das “seleções” isto é, de uma certa espécie de relações de um-para-muitos. A finitude é fundida com o estudo geral das relações ancestrais, que acarreta toda a teoria da indução matemática. As propriedades ordinais das várias espécies de séries numéricas, e os elementos da teoria da continuidade de funções e os limites de funções, podem ser generalizados de modo a não mais envol-

verem qualquer referência essencial a números. Constitui um princípio de todo raciocínio formal generalizar ao máximo, porquanto assim asseguramos que um determinado processo de dedução tenha resultados mais amplamente aplicáveis; estamos, portanto, ao generalizarmos assim o raciocínio da Aritmética, meramente seguindo um preceito que é universalmente admitido em Matemática. E ao generalizarmos desse modo, criamos, na verdade, um conjunto de sistemas dedutivos novos, nos quais a Aritmética tradicional é imediatamente dissolvida e ampliada; mas se se deve dizer que qualquer desses novos sistemas dedutivos — por exemplo, a teoria das seleções — pertence à Lógica ou à Aritmética, é coisa inteiramente arbitrária e incapaz de ser racionalmente decidida.

Somos agora colocados face a face com a questão: Que disciplina é essa, que pode ser chamada indiferentemente Matemática ou Lógica? Haverá algum modo pelo qual poderemos defini-la?

Certas características da disciplina são claras. Para começar, não tratamos, nesta disciplina, com coisas particulares ou propriedades particulares: tratamos formalmente com o que pode ser dito sobre *qualquer* coisa ou *qualquer* propriedade. Estamos preparados para dizer que um e um são dois, mas não que Sócrates e Platão são dois, porque, em nossa capacidade de lógico ou matemático puro, jamais ouvimos falar de Sócrates e Platão. Um mundo no qual não tenha existido tais indivíduos ainda seria um mundo no qual um e um são dois. Não nos compete, como matemático puro e lógico, mencionar seja o que for, porque, se o fizermos, introduziremos algo irrelevante e não formal. Podemos esclarecer isso pela aplicação ao caso do silogismo. A Lógica tradicional diz: “Todos os homens são mortais, Sócrates é um homem, portanto Sócrates é mortal”. Mas está claro que o que *queremos* asserir é, para começar, apenas que as premissas implicam a conclusão não que as premissas e a conclusão sejam realmente verdadeiras; até mesmo a Lógica mais tradicional diz que a verdade real das premissas é irrelevante para a Lógica. Assim, a primeira modificação a ser feita no silogismo tradicional acima é enunciar-lo da seguinte forma: “Se todos os homens são mortais e Sócrates é um homem, então Sócrates é mortal”. Podemos agora observar que se pretende comunicar que esse argumento é válido em virtude de sua *forma* e não em virtude dos termos particulares que nele ocor-

rem. Se tivéssemos omitido “Sócrates é um homem” de nossas premissas, teríamos um argumento não-formal, somente admissível porque Sócrates é de fato um homem; neste caso não teríamos podido generalizar o argumento. Mas quando, como acima, o argumento é *formal*, nada depende dos termos que nele ocorrem. Assim, podemos substituir *homens* por α , *mortais* por β e Sócrates por x , onde α e β são quaisquer classes e x é qualquer indivíduo. Chegamos então ao enunciado: “Independentemente de que valores possíveis x e α e β possam ter, se todos os α forem β e x for um α , então x é um β ”; em outras palavras, “a função proposicional ‘se todos os α são β e x é um α , então x é um β ’ é sempre verdadeira”. Temos aqui, finalmente, uma proposição de Lógica — a que é apenas *sugerida* pelo enunciado tradicional sobre Sócrates e homens e mortais.

Está claro que, se temos em mira o raciocínio *formal*, devemos sempre chegar ultimamente a enunciados como o acima enunciado, nos quais não sejam mencionadas coisas ou propriedades reais; isso acontecerá através do mero desejo de não desperdiçarmos o nosso tempo provando em um caso particular o que pode ser provado geralmente. Seria ridículo demorar-nos em longo argumento sobre Sócrates e depois passarmos precisamente pelo mesmo argumento sobre Platão. Se o nosso argumento se aplica (digamos) a todos os homens, prová-lo-emos relativamente a “ x ”, com a hipótese “se x é um homem”. Com essa hipótese o argumento conservará sua validade hipotética até mesmo quando x não é um homem. Mas constataremos que o nosso argumento ainda seria válido se, em vez de supormos que x seja um homem, supuséssemos que fosse um macaco ou um ganso ou um Primeiro-Ministro. Não podemos, portanto, desperdiçar nosso tempo tomando para premissas “ x é um homem”, preferindo escolher “ x é um α ”, onde α é qualquer classe de indivíduos, ou “ ϕx ” onde ϕ é qualquer função proposicional de algum tipo assinalado. Assim, a ausência de toda menção a coisas ou propriedades particulares em Lógica ou Matemática pura é um resultado necessário do fato de ser esse estudo, como se diz, “puramente formal”.

A esta altura nós nos surpreendemos defrontando-nos com um problema que é mais fácil de se enunciar do que de se resolver. O problema é: “Quais são os constituintes de uma proposição lógica?” Não sei a resposta, mas me proponho explicar como o problema surge.

Tomemos (digamos) a proposição “Sócrates *precedeu* Aristóteles”. Aqui, parece óbvio termos uma relação entre dois termos e que os constituintes da proposição (bem como do fato correspondente) são simplesmente os dois termos e a relação, isto é, Sócrates, Aristóteles e *precedeu*. (Ignoro o fato de que Sócrates e Aristóteles não são simples; também o fato de que o que parece ser seus nomes é realmente descrições truncadas. Nenhum desses fatos é relevante para a presente questão.) Podemos representar a forma geral de tal proposição por “ $x R y$ ”, que se pode ler “ x tem a relação R com y ”. Essa forma geral pode ocorrer nas proposições lógicas, mas nenhuma instância particular dela pode ocorrer. Ser-nos-á dado inferir que a própria forma geral seja um constituinte de tais proposições lógicas?

Dada uma proposição, tal como “Sócrates precede Aristóteles”, temos certos constituintes e também uma certa forma. Mas a forma não é ela mesma um novo constituinte; se o fosse, necessitaríamos de uma nova forma para englobar tanto ela como os outros constituintes. Podemos, na verdade, transformar *todos* os constituintes de uma proposição em variáveis, mantendo, ao mesmo tempo, a forma inalterada. É isso o que fazemos quando usamos um esquema como “ $x R y$ ”, que indica qualquer uma de uma certa classe de proposições, a saber, as que asserem relações entre dois termos. Podemos passar a asserções gerais, tal como “ $x R y$ é algumas vezes verdadeira” — isto é, há casos em que se verificam relações duplas. Essa asserção pertencerá à Lógica (ou Matemática) no sentido em que estamos usando a palavra. Mas nesta asserção não mencionamos quaisquer coisas particulares ou relações particulares; nenhuma coisa ou relação particular poderá jamais entrar em uma proposição da Lógica pura. Somos deixados com as *formas* puras como os únicos constituintes possíveis das proposições lógicas.

Não desejo asserir positivamente que as formas puras — por exemplo, a forma “ $x R y$ ” — realmente entram em proposições da espécie que estamos considerando. A questão da análise de tais proposições é difícil, havendo considerações em conflito de um e de outro lado. Não podemos cuidar dessa questão agora, mas podemos aceitar, como uma primeira aproximação, o ponto de vista de que as *formas* são o que entra nas proposições lógicas como seus constituintes. E podemos explicar (embora não definir formalmente) o que queremos dizer por “forma” de uma proposição, como se segue:

A "forma" de uma proposição é aquilo, nela, que permanece inalterado quando todo constituinte da proposição é substituído por outro.

Assim "Sócrates é anterior a Aristóteles" tem a mesma forma que "Napoleão é maior do que Wellington", embora todos os constituintes das duas proposições sejam diferentes.

Podemos então estabelecer, como uma característica necessária (embora não suficiente) das proposições lógicas ou matemáticas, que elas sejam tais que possam ser obtidas de uma proposição não contendo variável alguma (isto é, nenhuma palavra como *todos*, *alguns*, *um*, *o* etc.) transformando todo constituinte em uma variável e asserindo que o resultado é sempre verdadeiro ou algumas vezes verdadeiro, ou que é sempre verdadeiro com respeito às outras, ou qualquer variante dessas formas. E outra maneira de enunciar a mesma coisa é dizer que a Lógica (ou a Matemática) está interessada somente em *formas*, estando interessada nelas somente no tocante à maneira de enunciar que são sempre ou algumas vezes verdadeiras — com todas as permutações de "sempre" e "algumas vezes" que possam ocorrer.

Há em toda linguagem algumas palavras cuja única função é indicar forma. Essas palavras, falando-se de modo geral, são mais comuns nas linguagens que têm menos inflexões. Vejamos "Sócrates é humano". Aqui "é" não é um constituinte da proposição, mas meramente indica a forma sujeito-predicado. Similarmente, em "Sócrates é anterior a Aristóteles", "é" e "a" meramente indicam forma; a proposição é a mesma que "Sócrates precede Aristóteles", na qual aquelas palavras desapareceram e a forma é indicada de outro modo. A forma *pode*, via de regra, ser indicada de outro modo que não por palavras específicas: a ordem das palavras pode fazer mais pelo que é desejado. Mas não se deve insistir nesse princípio. Por exemplo, é difícil ver como poderíamos expressar convenientemente formas moleculares de proposições (isto é, o que chamamos "funções-de-verdade") sem palavra alguma. Vimos no capítulo XIV que uma palavra ou símbolo é suficiente para esse propósito, a saber, uma palavra ou símbolo expressando *incompatibilidade*. Mas sem pelo menos uma nos encontraríamos em dificuldades. Isso não é, contudo, o importante para o nosso presente propósito. O que é importante para nós é observar que a forma poderá ser o interesse exclusivo de uma proposição

geral, mesmo quando nenhuma palavra ou símbolo nessa proposição designe a forma. Se desejamos falar da própria forma, devemos ter uma palavra para ela; mas se, como em Matemática, desejamos falar sobre todas as proposições que têm a forma, geralmente se constatará não ser indispensável uma palavra para a forma; provavelmente ela *nunca* é indispensável em teoria.

Admitindo — como penso poderemos fazer — que as formas das proposições *podem* ser representadas pelas formas das proposições nas quais são expressadas sem qualquer palavra especial para as formas, chegaríamos a uma linguagem na qual tudo o que fosse formal pertenceria à sintaxe e não ao vocabulário. Em tal linguagem poderíamos expressar *todas* as proposições da Matemática, até mesmo se não soubéssemos uma só palavra da linguagem. A linguagem da Lógica Matemática, caso fosse aperfeiçoada, seria tal linguagem. Teríamos símbolos para as variáveis, tais como "x" e "R" e "y", arranjados de várias maneiras; e a maneira de arranjar indicaria que algo estaria sendo dito verdadeiro para todos ou alguns valores das variáveis. Não necessitaríamos saber qualquer das palavras, porque elas só seriam necessárias para dar valores às variáveis, o que constitui o assunto dos matemáticos que cuidam da Matemática aplicada, não de uma proposição da Lógica, que dada uma linguagem apropriada, tal proposição pode ser asserida em tal linguagem por uma pessoa que conheça a sintaxe sem saber uma única palavra do vocabulário.

Mas, afinal de contas, há palavras que expressam forma, tais como "é" e "do que". E, em todo simbolismo até agora inventado para a Lógica Matemática, há símbolos que têm significados formais constantes. Podemos tomar como exemplo o símbolo de incompatibilidade que é empregado na estruturação das funções-de-verdade. Tais palavras ou símbolos podem ocorrer em Lógica. A questão é: Como os definiremos?

Tais palavras ou símbolos expressam o que é chamado "constantes lógicas". As constantes lógicas podem ser definidas exatamente como definimos as formas; na verdade, elas são, em essência, a mesma coisa. Uma constante lógica fundamental será aquela que é comum entre várias proposições, cada uma das quais pode resultar de qualquer outra substituição de termos um pelo outro. Por exemplo, "Napoleão é maior do que Wellington" resulta de "Sócrates é anterior a Aristóteles",

pela substituição de "Sócrates" por "Napoleão", "Aristóteles" por "Wellington" e "anterior" por "maior". Algumas proposições podem ser obtidas dessa maneira do protótipo "Sócrates é anterior a Aristóteles" e outras não; as que podem são as da forma " $x R y$ ", isto é, expressam relações duplas. Não podemos obter do protótipo acima, pela substituição termo a termo, proposições como "Sócrates é humano" ou "os atenienses deram cicuta a Sócrates", porque a primeira é da forma sujeito-predicado e a segunda expressa uma relação de três termos. Para que tenhamos palavras em nossa linguagem lógica pura, elas devem ser tais que expressem "constantes lógicas" e as "constantes lógicas" serão sempre o que é ou se derivarão sempre do que é comum entre um grupo de proposições deriváveis umas das outras, da maneira acima, por substituição termo a termo. E isso que há em comum é o que chamamos "forma".

Nesse sentido, todas as constantes que ocorrem na Matemática pura são constantes lógicas. O número 1, por exemplo, é derivado de proposições da forma: "Há um termo c tal que ϕx é verdadeira quando e somente quando x é c ". Isso é uma função de ϕ , e várias proposições diferentes resultam de dar-se valores diferentes a ϕ . Podemos (com um pouco de omissão dos passos intermediários que não são relevantes para os nossos propósitos atuais) tomar a função acima de ϕ como o que se quer dizer por "a classe determinada por ϕ é uma classe unitária" ou "a classe determinada por ϕ é um membro de 1" (sendo 1 uma classe de classes). Dessa maneira, as proposições em que 1 ocorre adquirem um significado que se deriva de certa forma lógica constante. E se constatará dar-se o mesmo com todas as constantes matemáticas: todas são constantes lógicas, ou abreviações simbólicas cujo pleno uso em um contexto próprio é definido por meio de constantes lógicas.

Mas embora todas as proposições lógicas (ou matemáticas) possam ser expressadas inteiramente em termos de constantes lógicas juntamente com variáveis, não se dá o caso inverso de todas as proposições que podem ser expressadas dessa maneira serem lógicas. Encontramos, até agora, um critério necessário, mas não suficiente das proposições matemáticas. Definimos suficientemente o caráter das idéias primitivas em termos das quais todas as idéias da Matemática podem ser definidas, mas não das proposições primitivas a partir das quais todas as proposições da Matemática podem ser deduzidas. Isso é um

assunto mais difícil, para o qual não se conhece até agora a resposta completa.

Podemos tomar o axioma da infinidade como um exemplo de proposição que, embora possa ser enunciada em termos lógicos, não pode ser asserida como verdadeira pela Lógica. Todas as proposições da Lógica têm uma característica que se costuma expressar dizendo-se que era analítica, ou que suas contradições eram autocontraditórias. Essa maneira de enunciar não é, contudo, satisfatória. A lei de contradição é meramente uma entre proposições lógicas; não tem qualquer proeminência especial; e a prova de que a contraditória de alguma proposição é autocontraditória deverá semelhantemente exigir outros princípios de dedução além da lei de contradição. Não obstante, a característica das proposições lógicas que buscamos é aquela que foi sentida, e supostamente definida, pelos que diziam consistir ela na dedutibilidade a partir da lei de contradição. Essa característica, que podemos, no momento, chamar *tautologia*, obviamente não pertence à asserção de que o número de indivíduos no universo é n , seja qual for o número n . Não fosse a diversidade de tipos, seria possível provar logicamente que há classes de n termos, sendo n qualquer inteiro finito; ou até que há classes de $\aleph_0$ termos. Mas, devido aos tipos, tais provas, como vimos no capítulo XIII, são falaciosas. Ficamos entregues à observação empírica para determinar se há n indivíduos no mundo. Entre os mundos "possíveis", no sentido leibniziano, haverá mundos tendo um, dois, três... indivíduos. Não parece sequer haver qualquer necessidade lógica para que houvesse sequer um indivíduo* — por que, de fato, deve existir qualquer mundo seja ele qual for? A prova ontológica da existência de Deus, caso fosse válida, estabeleceria a necessidade lógica de pelo menos um indivíduo. Mas essa prova é geralmente reconhecida inválida e se apóia, de fato, em um ponto de vista errado sobre a existência — isto é, malogra em perceber que só pode ser asserida a existência de algo descrito e não de algo nomeado, de modo que é sem significado argumentar-se a partir de "isto é assim-assim" e "o assim-assim existe" para "isto existe". Se rejeitamos o argumento ontológico, parece sermos levados a concluir que a existência de um

* As proposições primitivas em *Principia Mathematica* são tais que permitem a inferência de que pelo menos um indivíduo existe. Mas hoje contemplo isso como um defeito em pureza lógica.

mundo é um acidente — isto é, ela não é logicamente necessária. Se assim for, nenhum princípio da Lógica pode asserir a “existência”, exceto sob uma hipótese, isto é, nenhum pode ser da forma “a função proposicional assim-assim é algumas vezes verdadeira”. As proposições dessa forma, quando ocorrem na Lógica, terão de ocorrer como hipóteses ou conseqüências de hipóteses, não como proposições asseridas como proposições completas. As proposições completas asseridas da Lógica serão todas tais que afirmam que alguma função proposicional é *sempre* verdadeira. Por exemplo, é sempre verdade que, se p implica q e q implica r , então p implica r , ou que, se todos os α são β e x é um α , então x é um β . Tais proposições podem ocorrer em Lógica e sua verdade é independente da existência do universo. Podemos estabelecer que, se não existisse nenhum universo, *todas* as proposições gerais seriam verdadeiras; porque a contraditória de uma proposição geral é (como vimos no capítulo XV) uma proposição asserindo existência, e, portanto, seria sempre falsa se não existisse um universo.

As proposições lógicas são tais que podem ser conhecidas *a priori*, sem estudo do mundo real. Só sabemos do estudo de fatos empíricos que Sócrates é um homem, mas conhecemos a correção do silogismo em sua forma abstrata (isto é, quando ele é enunciado em termos de variáveis) sem necessitar de qualquer apelo à experiência. Isso não é uma característica das proposições lógicas em si, mas da maneira em que as conhecemos. Tem, contudo, um impacto sobre a questão sobre qual pode ser sua natureza, porquanto há algumas espécies de proposições que seria muito difícil supor-se poderíamos conhecer sem experiência.

É claro que a definição de “Lógica” ou “Matemática” deve ser buscada através da tentativa de dar uma nova definição da velha noção de proposições “analíticas”. Conquanto não mais nos possamos satisfazer com o definir as proposições lógicas como sendo aquelas que se seguem da lei da contradição, podemos e devemos ainda admitir que elas são uma classe de proposições inteiramente diferentes das que chegamos a conhecer empiricamente. Todas elas têm a característica que, há pouco, concordamos chamar “tautologia”. Isto, combinado com o fato de que podem ser inteiramente expressadas em termos de variáveis e constantes lógicas (sendo uma constante lógica algo que permanece constante em uma proposição até mesmo quando *todos* os seus constituintes são mudados), dará a defi-

nição de Lógica ou Matemática pura. No momento, não sei como definir “tautologia”.* Seria fácil apresentar uma definição que seria satisfatória por momentos; mas não conheço definição alguma que eu sinta ser satisfatória, a despeito de eu me sentir inteiramente familiarizado com a característica da qual se deseja uma definição. A esta altura, portanto, por momentos, atingimos a fronteira do conhecimento em nossa jornada de volta dos fundamentos lógicos da Matemática.

Chegamos agora ao fim de nossa introdução algo sumária à Filosofia Matemática. É impossível transmitir adequadamente as idéias contidas neste assunto enquanto nos abstermos do uso dos símbolos lógicos. Como a linguagem ordinária não tem palavra alguma que expresse exatamente o que desejamos expressar, torna-se necessário, enquanto nos apegamos à linguagem ordinária, forçar as palavras a terem significados incomuns; e certamente o leitor tende, após algum tempo, se não mesmo logo de início, a atribuir os significados usuais às palavras, chegando, assim, a noções errôneas sobre o que se pretende dizer. Mais ainda, a gramática e a sintaxe ordinárias são extraordinariamente enganosas. Este é o caso, *e.g.* com relação aos números; “dez homens” é, gramaticalmente, da mesma forma que “homem branco”, de modo que se pode pensar que 10 seja um adjetivo qualificando “homens”. O mesmo se dá quando são envolvidas funções proposicionais, e, em especial, no tocante à existência e às descrições. Porque a linguagem é enganosa, bem como porque ela é difusa e inexata quando aplicada à Lógica (à qual jamais se destinou), o simbolismo lógico é absolutamente necessário a qualquer tratamento exato ou total de nosso assunto. Portanto, os leitores que desejarem adquirir um domínio dos princípios da Matemática não fugirão, é de se esperar, ao trabalho de dominar os símbolos — um trabalho que, na verdade, é muito menor do que se poderá pensar. Como o estudo apressado acima deve ter deixado evidente, há inumeráveis problemas não resolvidos no assunto, sendo necessário muito trabalho. Se algum estudante for levado a um sério estudo da Lógica Matemática por este pequeno livro, este terá servido ao principal propósito com que foi escrito.

* A importância da “tautologia” para uma definição de Matemática me foi apontada por meu ex-aluno Ludwig Wittgenstein, que trabalhava no problema. Não sei se ele o resolveu ou até se ele está vivo ou morto.